

## RÉGIME SINUSOÏDAL ; PONTS D'IMPÉDANCES - corrigé du TP2

### 1. Représentations de Thévenin et de Norton

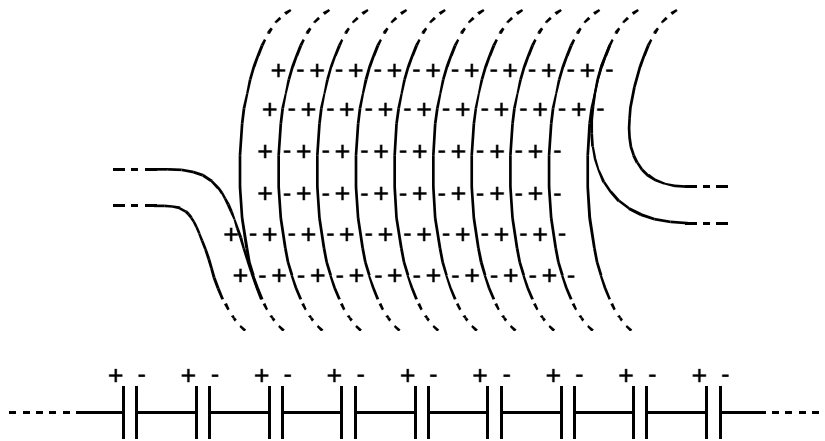
•

### 2. Inductance et résistance d'une bobine

#### 2.1. Capacité parasite entre les spires de la bobine

◇ remarque : cette partie ne décrit pas ce qui est attendu des élèves, mais décrit au contraire les difficultés d'interprétation qu'il est peu probable qu'ils trouvent sans aide.

• Lorsque la fréquence est assez grande, l'inductance de la bobine tend à empêcher de plus en plus le passage du courant dans les spires (d'autant plus qu'en fait, la résistance augmente aussi à cause de "l'effet de peau").



• Au contraire, les faces en contact des spires successives (séparées par une couche de vernis) peuvent se polariser comme des condensateurs ; bien que la capacité correspondante soit faible (d'autant plus qu'en série entre elles, ce sont les inverses des capacités qui s'ajoutent), le courant peut alors passer plus facilement par ces condensateurs plutôt qu'en faisant le tour des spires.

◇ remarque : les charges ne traversent pas l'isolant (un courant continu ne peut pas passer ainsi !), mais la polarisation de chaque spire influence à distance les voisines et cela peut faire passer le courant alternatif à haute fréquence.

• Ceci équivaut à un courant qui passe d'une borne à l'autre de la bobine sans passer par les spires, et donc à une capacité en parallèle avec le schéma "usuel" de la bobine.

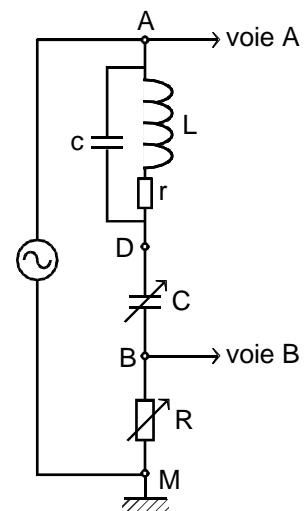
• Le montage réel peut donc être décrit de façon plus réaliste par le schéma ci-contre, où on suppose que  $L$  et  $r$  sont des constantes.

L'impédance de la bobine est dans ce cas :  $Z = \frac{1}{r + jL\omega} + jC\omega$  et l'impédance

du pont est :  $Z_e = Z + \frac{1}{jC\omega} + R = \frac{r.(C+c)\omega + j(L.(C+c)\omega^2 - 1)}{C\omega.(1 - Lc\omega^2) + jrc\omega} + R.$

• L'équilibre du pont en mode "XY" (impédance réelle) ne correspond plus

alors à :  $L = \frac{1}{C\omega^2}$  mais à :  $\frac{L.(C+c)\omega^2 - 1}{r.(C+c)\omega} = \frac{rc\omega}{1 - Lc\omega^2}.$



• En posant :  $\alpha = c.(C+c) \omega^4$  ;  $\beta = -(C+2c) \omega^2$  ;  $\gamma = 1 + r^2c.(C+c) \omega^2$ , l'équation précédente peut s'écrire sous la forme :  $\alpha L^2 + \beta L + \gamma = 0$  ; les solutions positive sont :  $L = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ .

On constate alors que dans la limite des basses fréquences  $\alpha \approx 1$  (à l'ordre le plus bas), ce qui donne après simplification :  $L \approx \frac{1}{c\omega^2}$  ou  $L \approx \frac{1}{(C+c)\omega^2}$ .

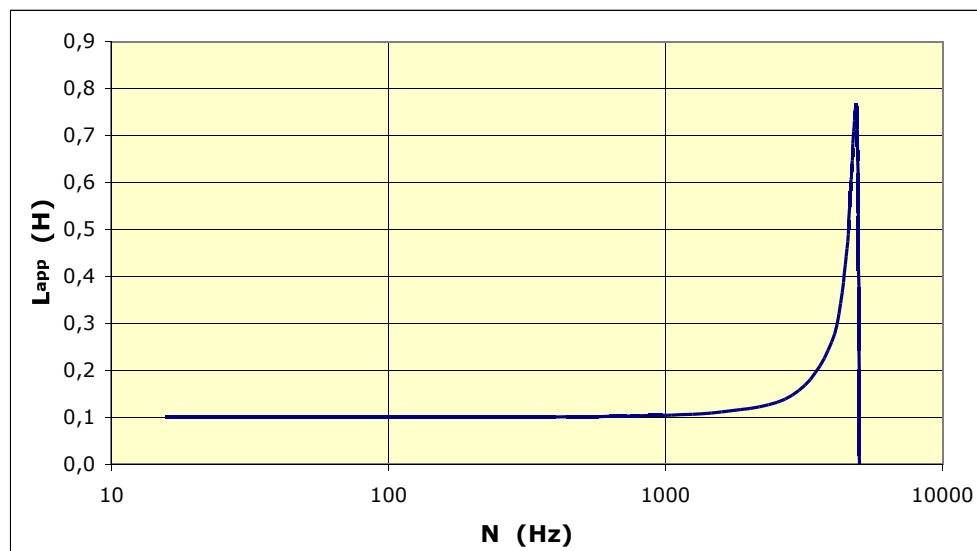
La première formule est sans intérêt car  $c$  est très petit et ne peut correspondre à un accord avec  $\omega$  petit que si l'inductance est très grande. De plus, même dans ce cas, l'accord ne dépend pas de  $C$  et ne peut donc servir qu'à mesurer  $c$  une fois qu'on connaît déjà  $L$ .

La solution correspondant à l'accord cherché est donc la seconde :  $L = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ , qui redonne effectivement  $L \approx \frac{1}{C\omega^2}$  quand  $c$  est négligeable.

• L'inductance "apparente" calculée par la formule non corrigée  $L_{app} = \frac{1}{C\omega^2}$  est alors fautive. On peut calculer  $L_{app}$  en fonction de  $\omega$  en supposant  $L$  et  $r$  constantes, puisque l'accord du pont est alors obtenu pour

$$\text{une capacité : } C = \frac{1}{L\omega^2} \frac{(1 - Lc\omega^2)^2 + (rc\omega)^2}{1 - Lc\omega^2 - \frac{r^2c}{L}} \quad \text{correspondant à : } L_{app} = L \frac{1 - Lc\omega^2 - \frac{r^2c}{L}}{(1 - Lc\omega^2)^2 + (rc\omega)^2}.$$

On obtient ainsi les variations suivantes (la courbe réelle est en fait légèrement différente, car la résistance n'est pas constante, mais le comportement est globalement le même) :



On constate (ce qui est logique) qu'à cause de la capacité parasite la bobine ne se comporte plus comme une bobine au delà de  $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Il faut donc ignorer les valeurs de  $L$  déduites des mesures à trop haute fréquence (plus même : ne pas chercher à utiliser la bobine dans ces conditions), et tenir compte de la capacité parasite pour celles des mesures qui (sans l'atteindre) s'approchent de la fréquence limite.

D'après la forme du numérateur de  $L_{app}$ , on comprend en outre que cet effet intervient à plus basse fréquence si  $r$  ( $\omega$ ) augmente à cause de l'effet de peau. Enfin on comprend que l'effet intervient aussi à plus basse fréquence pour les bobines avec noyau (ce dernier augmente la résistance, surtout s'il est en fer).

• Il se produit un effet analogue en ce qui concerne la résistance, car à l'équilibre du pont sa résistance est égale à la partie réelle de l'impédance :  $R_e = \frac{r}{(1 - Lc\omega^2)^2 + (rc\omega)^2} + R$ .

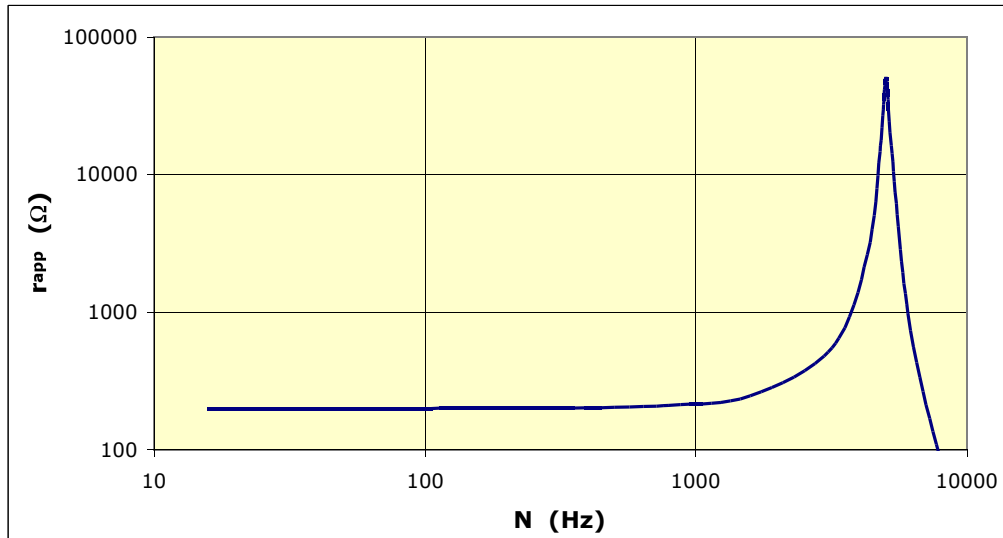
Ceci ne correspond plus à :  $r = R \cdot (\frac{V_A}{V_B} - 1)$  mais à :  $\frac{V_A}{V_B} = \frac{R_e}{R} = \frac{r}{R \cdot \frac{1}{(1 - Lc\omega^2)^2 + (rc\omega)^2} + 1} + 1$ .

• En posant :  $\Gamma = \frac{1}{r_{app} c^2 \omega^2}$  ;  $\mathcal{J} = \frac{1 - Lc\omega^2}{c^2 \omega^2}$  ;  $r_{app} = R \cdot (\frac{V_A}{V_B} - 1) = \frac{r}{(1 - Lc\omega^2)^2 + (rc\omega)^2}$ , l'équation peut s'écrire :  $r^2 - \Gamma r + \mathcal{J} = 0$  ; les solutions positive sont :  $r = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4m}}{2}$ .

On constate alors que dans la limite des basses fréquences  $\mathcal{J} \approx \Gamma r_{app}$  (à l'ordre le plus bas), et  $R_e \approx r + R$ , ce qui donne après simplification :  $r \approx \frac{1}{r_{app} c^2 \omega^2}$  ou  $r \approx r_{app}$ .

La première formule est sans intérêt car elle tend vers l'infini. La solution correspondant à l'accord cherché est donc la seconde :  $r = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4m}}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4r_{app}^2 c^2 \omega^2 (1 - Lc\omega^2)}}{2r_{app} c^2 \omega^2}$ , qui redonne effectivement  $r \approx r_{app}$  quand  $c$  est négligeable.

On obtient ainsi les variations suivantes (la courbe réelle est en fait plus ou moins différente, car la résistance n'est pas constante, mais le comportement limite est du même type) :



On constate que la résistance apparente augmente très nettement à l'approche de  $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Il faut donc tenir compte de la capacité parasite pour celles des mesures qui (sans l'atteindre) s'approchent de la fréquence limite, afin de séparer cette augmentation apparente des variations réelles dues aux courants induits et à l'effet de peau (non décrits ici).

◇ remarque : une observation plus détaillée semble montrer que la perturbation intervient à des fréquences légèrement supérieures pour  $r_{app}$  que pour  $L_{app}$  ( $\approx 5030$  Hz au lieu de  $4870$  Hz dans l'exemple étudié).

## 2.2. Matériaux magnétiques et noyau de la bobine

- Lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique qui serait  $B_0$  en leur absence, certains matériaux deviennent aimantés et le champ total qui en résulte correspond à :  $B = B_0 \cdot (1 + \chi)$  où  $\chi$  est appelé "susceptibilité magnétique" du matériau.

- La classification des différentes catégories de matériaux magnétiques s'effectue selon leur susceptibilité  $\chi$  :

- ◇ les matériaux diamagnétiques (cuivre, argent, or, bismuth, béryllium) ont une susceptibilité faible et négative (environ  $10^{-5}$ ) ;

- ◇ les matériaux paramagnétiques (aluminium, platine, manganèse) ont une susceptibilité faible et positive (environ  $10^{-3}$  à  $10^{-5}$ ) ;

- ◇ les matériaux ferromagnétiques qui sont les plus importants (fer, cobalt, nickel, terres rares) ont une susceptibilité positive et forte (50 à 10 000) ; de plus, cette susceptibilité n'est pas constante (elle dépend non seulement du champ appliqué, mais aussi des champs auxquels le matériau a été soumis antérieurement (effet d'hystérésis)).