

## Partie 4 : Les ondes électromagnétiques dans les milieux

### 1 Électromagnétisme des milieux

Lorsqu'elles rencontrent un milieu différent du vide, les ondes électromagnétiques sont modifiées par l'*interaction* entre les champs électriques et magnétiques propres à l'onde et les champs produits par la réaction du milieu. Cette réaction est induite par la mise en mouvement des charges emprisonnées dans le milieu. Ce mouvement s'effectue en réponse au champ électrique (*polarisation*) ou par la modification des dipôles magnétiques présents à l'intérieur du milieu sous l'effet du champ magnétique (*aimantation*). Bien que les fondements des théories de la polarisation et de l'aimantation reposent sur des bases quantiques, il est possible d'en faire une description qualitative à l'aide de principes "classiques". C'est ce type d'approche qui est adopté ici.

#### 1.1 Polarisation

Sous l'effet d'un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}$ , les charges présentes dans un milieu vont subir une force coulombienne et se déplacer. Il peut exister deux types de charges *structurales* dans les milieux. D'une part, les *charges mobiles* ou *charges libres*, sont capables de se déplacer sur des distances grandes comparées à la dimension caractéristique de la structure du milieu (par exemple la taille de la maille cristallographique pour une structure cristalline, ou la longueur des liaisons métalliques dans un métal). Les électrons de conduction ou les ions "libres" font partie de la classe des charges mobiles. Ce cas sera traité spécifiquement dans la suite. D'autre part, les *charges liées*, c'est à dire celles qui ne peuvent se déplacer que sur des distances de l'ordre de la taille d'un atome (quelques angströms), sont également déplacées par le champ extérieur. Le mouvement de ces charges intérieures produit un déplacement du barycentre des charges négatives  $G^-$  par rapport au barycentre des charges positives  $G^+$ , alors qu'en l'absence de champ extérieur ces deux points sont confondus (le milieu demeurant toutefois neutre). En conséquence, en présence de  $\vec{E}_{ext}$ , on voit apparaître une *densité volumique de moment dipolaire*  $\vec{P}$  auquel contribue chaque *moment dipolaire induit* au niveau de chaque charge :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \quad (1)$$

Le cas le plus simple permettant de se représenter le phénomène de polarisation est celui de l'atome d'hydrogène, dans lequel un électron est associé à un noyau constitué d'un unique proton (Figure 1, gauche). La position moyenne de l'électron est confondue avec celle du noyau lorsque  $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$ . Dès que  $\vec{E}_{ext} \neq \vec{0}$ , le "nuage électronique"<sup>1</sup> se déforme et s'écarte de sa position normale sous l'effet de la force coulombienne. Le noyau peut également se déplacer dans une direction opposée (la direction de la force dépend du signe de la charge), mais sa masse importante rend le mouvement négligeable par rapport à celui de l'électron. Pour un volume contenant une *densité de charges liées*  $N$  par unité de volume, le déplacement relatif des électrons par rapport à leur noyau de rattachement,  $\vec{\delta} = \vec{G}^- - \vec{G}^+$ , produit un moment dipolaire macroscopique (Figure 1, droite) :

$$d\vec{p} = Nd\tau q \vec{\delta} \implies \vec{P} = Nq \vec{\delta} \quad (\text{avec } q = e \text{ pour le couple électron-proton}) \quad (2)$$

1. Pour simplifier, on identifie le nuage électronique à la densité de probabilité de présence de l'électron en chaque point de l'espace au cours de son mouvement autour du noyau.

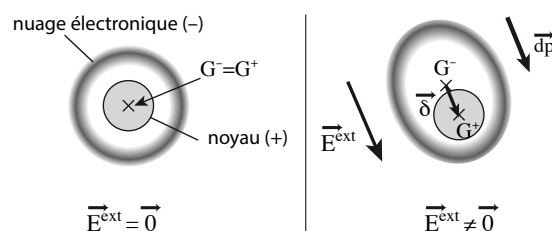


FIGURE 1

Le moment dipolaire induit à l'intérieur ou en surface du milieu est relié à la distribution des charges intérieures  $\rho_{\text{pol}}$  ou surfacique  $\sigma_{\text{pol}}$  au travers des relations :

$$\begin{aligned} \boxed{\rho_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}} & \quad (\text{à l'intérieur}) \\ \sigma_{\text{pol}} = -\vec{P} \cdot \vec{n} & \quad (\text{en surface}) \\ \vec{P} = \vec{0} & \quad (\text{à l'extérieur}) \end{aligned} \quad (3)$$

Cette équation n'est valide que sous la condition de neutralité globale du milieu :

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \, dV = 0 \quad (4)$$

En régime variable,  $\vec{\delta}$  dépend du temps ( $\vec{\delta} = \vec{\delta}(t)$ ). Par conséquent, le mouvement des charges liées d'une position à l'autre s'apparente à un *courant de polarisation*  $\vec{j}_{\text{pol}}$ . En notant  $\vec{v}_i$  la vitesse de chaque charge comme dérivée de sa position, et en considérant que la position moyenne des charges liées est fixe, on a, pour chaque charge du milieu (liée ou mobile) :

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{\delta}_i}{dt}, \quad (5)$$

La densité de courant totale  $\vec{j}_{\text{total}}$  est alors la somme du courant de conduction  $\vec{j}_{\text{cond}}$  pour les charges libres et du courant de polarisation  $\vec{j}_{\text{pol}}$  pour les charges liées :

$$\vec{j}_{\text{total}} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i = \vec{j}_{\text{cond}} + \vec{j}_{\text{pol}} = \vec{j}_{\text{cond}} + \sum_{k \text{ liées}} n_k q_k \frac{d\vec{\delta}_k}{dt} \quad (6)$$

À l'intérieur d'un *conducteur*, les effets de polarisation sont négligeables, ce qui signifie que seul  $\vec{j}_{\text{cond}}$  devra être pris en compte. Au contraire, dans un *diélectrique*, qu'on identifie communément à un *matériau isolant*, il n'existe pas de charges libres. Le courant total se réduit alors à  $\vec{j}_{\text{pol}}$ .

Des équations 2 et 6, on déduit :

$$\boxed{\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} \quad (7)$$

Comme on l'a vu, la densité volumique de moment dipolaire  $\vec{P}$  est nulle lorsque  $\vec{E}^{\text{ext}} = \vec{0}$ . Dès que  $\vec{E}^{\text{ext}} \neq \vec{0}$ , l'apparition du moment dipolaire induit  $\vec{P}$  produit une modification du champ électrique ambiant en rajoutant un *champ électrique de polarisation*  $\vec{E}_p$  au champ extérieur. Par conséquent, le moment dipolaire induit, qui est proportionnel au *champ électrique total*, peut s'exprimer sous la forme :

$$\boxed{\vec{P} \propto \vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}^{\text{ext}} + \vec{E}^{\text{pol}}} \quad (8)$$

Cette équation signale que la densité volumique de moment dipolaire à l'intérieur d'un matériau produit une *réaction* dont l'effet vient se superposer à celui du champ extérieur.

## 1.2 Aimantation

De même que certains matériaux contiennent des charges leur permettant de se polariser, d'autres matériaux possèdent la capacité de *s'aimanter*. L'aimantation peut être présente en dehors de toute action extérieure, ou bien induite. L'*aimantation forte* est celle qui nous est la plus familière car elle est caractéristique des *matériaux ferromagnétiques* employés dans les aimants permanents. Elle a pour cause les interactions entre les atomes constituant la matière et dépend de la température. Elle ne sera pas étudiée ici car elle ne concerne pas, en général, des matériaux aux propriétés optiques intéressantes (les aimants communs sont opaques). L'*aimantation faible* des matériaux présente un intérêt plus large en optique. L'aimantation faible a pour cause les moments cinétiques orbitaux des électrons ainsi que leurs spins propres. Sous l'effet du champ magnétique ambiant, les boucles de courant naturellement présentes dans le matériaux tendent à s'orienter collectivement dans une direction préférentielle, ce qui produit l'apparition d'un champ magnétique induit. L'aimantation faible est de deux natures. D'une

part, l'*effet diamagnétique* se manifeste par une aimantation de faible intensité, toujours observée quel que soit le matériau et quelle que soit la température, qui prend son origine dans le mouvement orbital des électrons. Le champ magnétique induit est alors orienté dans le même sens que  $\vec{B}^{ext}$ . Les effets du diamagnétisme sont souvent occultés par les *effets paramagnétiques*, d'intensité plus importante en général, dont la cause est l'orientation des moments magnétiques permanents produits par les spins électroniques. Le paramagnétisme n'est pas systématiquement présent, et dépend de la température. Son effet est d'orienter le champ magnétique induit dans le sens opposé à  $\vec{B}^{ext}$ .

De façon générale, on peut écrire la *densité volumique de moment magnétique*  $\vec{M}$  comme :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau} \quad (9)$$

Dans un matériau ferromagnétique,  $\vec{M} \neq \vec{0}$  même si  $\vec{B}^{ext} = \vec{0}$  (aimantation permanente). Pour les autres matériaux,  $\vec{M} \neq \vec{0}$  uniquement lorsque  $\vec{B}^{ext} \neq \vec{0}$ .

De manière analogue au phénomène d'aimantation, les *courants d'aimantation* volumiques  $\vec{j}_{aim}$  ou surfaciques  $\vec{j}_{pol,surf}$  peuvent être reliés à la densité de moment magnétique par la relation :

$$\begin{aligned} \vec{j}_{aim} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{M} && \text{(à l'intérieur)} \\ \vec{j}_{pol,surf} &= \vec{M} \wedge \vec{n} && \text{(en surface)} \\ \vec{M} &= \vec{0} && \text{(à l'extérieur)} \end{aligned} \quad (10)$$

Enfin, la densité volumique de moment magnétique est proportionnelle au champ magnétique total, c'est à dire à la somme du champ magnétique extérieur  $\vec{B}^{ext}$  et du champ magnétique d'aimantation  $\vec{B}_{aim}$  :

$$\vec{M} \propto \vec{B}^{total} = \vec{B}^{ext} + \vec{B}_{aim} \quad (11)$$

## 2 Équations de Maxwell dans les milieux

### 2.1 Prise en compte des charges et des courants totaux

Les équations de Maxwell définies précédemment :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && \text{(MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 && \text{(MΦ)} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{(MF)} \\ \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && \text{(MA)} \end{aligned} \quad (12)$$

ainsi que la loi de conservation de la charge :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{(CC)} \quad (13)$$

demeurent valides dans les milieux. Toutefois, ces équations doivent être adaptées afin de prendre en compte l'ensemble des sources de charges et de courant donnant naissance aux champs électriques et magnétiques. En effet, comme on vient de le voir, des champs électriques et magnétiques peuvent être produits à l'intérieur d'un milieu sous l'effet d'une réaction du milieu à la perturbation induite par les actions extérieures. Les champs possèdent donc une source supplémentaire en terme de courants et de charges induits. Il convient donc de préciser ces équations en prenant en compte la charge totale  $\rho_{total}$  et le courant total  $\vec{j}_{total}$ . Les équations structurelles des champs électriques et magnétiques **MΦ** et **MF** demeurent inchangées car elles n'incluent pas les sources. Cependant, les équations **MG** et **MA** doivent

être précisées.

Pour **MG**, c'est la charge totale qui importe :

$$(\mathbf{MG}) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{total}}}{\epsilon_o} \quad \text{avec :} \quad \rho_{\text{total}} = \rho_{\text{libres}} + \rho_{\text{liées}} = \rho_{\text{libres}} + \rho_{\text{pol}} \quad (14)$$

où  $\rho_{\text{libres}}$  regroupe les charges qui existeraient en l'absence de polarisation. D'après l'équation 3, l'équation de Maxwell-Gauss modifiée peut alors s'écrire :

$$(\mathbf{MG}) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libres}}}{\epsilon_o} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_o} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libres}} \quad \text{avec :} \quad \vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}} \quad (15)$$

Le vecteur  $\vec{D}$  est le *déplacement électrique* ou l'*excitation électrique*. Son unité est  $[C.m^{-2}]$ .

De même, pour **MA**, c'est le courant total qui doit être pris en compte :

$$(\mathbf{MA}) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \left[ \vec{j}_{\text{total}} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad \text{avec :} \quad \vec{j}_{\text{total}} = \vec{j}_{\text{libres}} + \vec{j}_{\text{liées}} = \vec{j}_{\text{libres}} + \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_{\text{aim}} \quad (16)$$

où  $\vec{j}_{\text{libres}}$  correspond au courant de conduction éventuellement présent dans le milieu. En utilisant les équations 7 et 10, l'équation de Maxwell-Ampère devient :

$$(\mathbf{MA}) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \left[ \vec{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \mu_o \left[ \vec{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \right] \quad (17)$$

$$\text{ou} \quad \boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{avec :} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}}$$

Le vecteur  $\vec{H}$  est l'*excitation magnétique*. Son unité est  $[A.m^{-1}]$ .

Les équations de Maxwell s'expriment alors sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libres}} & (\mathbf{MG}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (\mathbf{M}\Phi) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\mathbf{MF}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (\mathbf{MA}) \end{array}} \quad (18)$$

## 2.2 Relations constitutives

On le voit, l'électromagnétisme dans les milieux fait intervenir six inconnues ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\rho_{\text{libres}}$  et  $\vec{j}_{\text{libres}}$ ) pour seulement quatre équations. Afin de résoudre ces équations de façon unique, il est donc nécessaire d'introduire des hypothèses supplémentaires. Ces hypothèses proviennent des *relations constitutives* entre les champs électriques et magnétiques d'une part, et les excitations électriques et magnétiques d'autre part. Elles permettent de caractériser la réponse du milieu en termes de polarisation et d'aimantation en fonction des champs électriques et magnétiques ambiants :

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}} \quad ; \quad \boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}} \quad (19)$$

où  $\epsilon$  et  $\mu$  sont respectivement la *permittivité* et la *perméabilité* du milieu. Ces grandeurs sont respectivement reliées aux permittivité et perméabilité du vide par l'intermédiaire de la *susceptibilité électrique* ( $\chi_e$ ) et de la *susceptibilité magnétique* ( $\chi_m$ ) :

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_o(1 + \chi_e)} \quad ; \quad \boxed{\mu = \mu_o(1 + \chi_m)} \quad (20)$$



On en déduit alors les expressions décrivant les réponses du milieu en termes de polarisation et d'aimantation :

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} = \epsilon_o \vec{E} + \epsilon_o \chi_e \vec{E} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} \implies \boxed{\vec{P} = \epsilon_o \chi_e \vec{E}} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} = \mu_o \vec{H} + \mu_o \chi_m \vec{H} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) \implies \boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}\end{aligned}\quad (21)$$

En prenant en compte les relations constitutives, et en considérant provisoirement que les permittivités et perméabilités sont *scalaires* et *réelles* (on parle alors d'un *milieu parfait*), les équations de Maxwell reprennent la forme familière :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_{\text{libres}}}{\epsilon} & \text{(MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \text{(M}\Phi\text{)} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(MF)} \\ \frac{1}{\epsilon \mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{\vec{j}_{\text{libres}}}{\epsilon} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{(MA)}\end{aligned}\quad (22)$$

À partir des équations de Maxwell ci-dessus, on peut reprendre l'ensemble du raisonnement ayant permis de mener à l'expression des ondes électromagnétiques dans le vide (i.e.  $\rho_{\text{libres}} = 0$  et  $\vec{j}_{\text{libres}} = \vec{0}$ , ce qui implique un milieu "isolant") en procédant à la simple substitution :

$$\begin{aligned}\epsilon_o &\longrightarrow \epsilon \\ \mu_o &\longrightarrow \mu\end{aligned}\quad (23)$$

En particulier, on constate que le milieu est alors *non absorbant*, et donc *transparent*. La célérité de l'onde et l'impédance dans le milieu s'écrivent respectivement :

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \neq c} \quad ; \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\quad (24)$$

où l'on rappelle que  $c^2 = \epsilon_o \mu_o$  et  $\eta_o = \sqrt{\mu_o / \epsilon_o}$ .

En introduisant la *permittivité relative*  $\epsilon_{\text{rel}}$  et la *perméabilité relative*  $\mu_{\text{rel}}$  :

$$\boxed{\epsilon_{\text{rel}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} = 1 + \chi_e} \quad ; \quad \boxed{\mu_{\text{rel}} = \frac{\mu}{\mu_o} = 1 + \chi_m}\quad (25)$$

on aboutit à l'expression de l'*indice de réfraction* du milieu et de son impédance :

$$\boxed{n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_{\text{rel}} \epsilon_{\text{rel}}}} \quad ; \quad \eta = \eta_o \sqrt{\frac{\mu_{\text{rel}}}{\epsilon_{\text{rel}}}} = \eta_o \frac{\mu_{\text{rel}}}{n} = \eta_o \frac{n}{\epsilon_{\text{rel}}}\quad (26)$$

Dans un matériau *non magnétique*, on a  $\mu = \mu_o$ , de sorte que  $\mu_{\text{rel}} = 1$  et  $\eta = \frac{\eta_o}{n}$ .

Enfin, le vecteur flux d'énergie électromagnétique, ou vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ , et la densité d'énergie électromagnétique  $w$  s'expriment :

$$\begin{cases} \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} = \vec{E} \wedge \vec{H} \\ w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \end{cases}\quad (27)$$

## 2.3 Permittivité complexe

Dans la relation constitutive entre l'excitation magnétique et le champ électrique, une difficulté a été occultée. Cette relation *a priori* linéaire permet de déterminer la valeur du vecteur  $\vec{D}$  à partir de celle de  $\vec{E}$  par l'intermédiaire de la permittivité  $\epsilon$  :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (28)$$

Cependant, en toute généralité, la permittivité  $\epsilon$  peut dépendre de la position considérée  $\vec{r}$  (milieu hétérogène), de la pulsation  $\omega$  de l'onde transportée par  $\vec{E}$  (milieu dispersif) et de la norme de  $\vec{E}$  (milieu non-linéaire). La permittivité peut également prendre des valeurs complexes (milieu absorbant). Enfin, la permittivité n'a aucune raison a priori d'être un *scalaire*. En effet, elle relie deux vecteurs dont les composantes peuvent s'entrecroiser. La permittivité peut donc prendre la forme d'une matrice  $3 \times 3$ , ce qui en fait un *tenseur d'ordre 2* :

$$\epsilon = \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{r}, \omega, |\vec{E}|) \in \mathbb{C} \quad (29)$$

Le cas le plus généralement rencontré est celui d'un *milieu homogène, linéaire, dispersif et absorbant* :

$$\boxed{\underline{\underline{\epsilon}}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)} \quad (30)$$

Le phénomène de dispersion est une propriété générale des milieux. Cependant, la dispersion ne se manifeste que dans des gammes restreintes de pulsations, à proximité des pulsations de résonance des constituants du milieu.

Quant à l'absorption, celle-ci est introduite par la partie imaginaire de la permittivité, comme nous allons le voir en menant à bien une analyse harmonique. Lorsque  $\underline{\underline{\epsilon}}_{\text{rel}}(\omega) \in \mathbb{C}$ , on constate un retard à la réponse du milieu. En effet, dans ce cas, le vecteur d'onde  $\underline{k}$  est également complexe. Considérons une onde plane progressive harmonique se propageant selon la direction  $(Oz)$  :

$$\vec{k} = \underline{k} \vec{e}_z = (k' + ik'') \vec{e}_z \quad (31)$$

La fonction d'onde s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(z, t) &= A_m e^{-i(\omega t - \underline{k} \cdot z)} \\ &= A_m e^{-k''z} e^{-i(\omega t - k'z)} \end{aligned} \quad (32)$$

Dans cette expression, le second terme  $\{e^{-i(\omega t - k'z)}\}$  est identifié à une onde se propageant dans la direction  $(Oz)$  à la célérité  $v_\Phi = \omega/k'(\omega)$ . En général, la partie réelle du vecteur d'onde  $k'(\omega)$  n'est pas proportionnelle à  $\omega$ , de sorte que  $v_\Phi$  dépend alors de  $\omega$ . Le milieu est dans ce cas *dispersif*. Le premier terme  $\{e^{-k''z}\}$  correspond à une *atténuation* en  $\alpha = k''(\omega)$ , ce qui signifie que l'onde est *absorbée* au cours de sa propagation. On verra plus tard qu'un *milieu dispersif est nécessairement absorbant*.

## 3 Modèle de Drude-Lorentz

### 3.1 Définition

Le modèle de Drude-Lorentz permet de rendre compte du phénomène de polarisation d'un milieu en considérant le mouvement des électrons liés sous l'effet d'un champ électromagnétique extérieur. L'électron de masse  $m$  porte la charge  $-e$ . Il subit (1) la force de Lorentz, (2) une force de frottement proportionnelle à sa vitesse, causée par les collisions avec son environnement lors de son déplacement, et (3) une force de rappel, provoquée par l'interaction avec les noyaux, tendant à le maintenir à une position

donnée. On note  $\vec{u}$  la position de l'électron. L'application du principe fondamental de la dynamique permet d'aboutir à l'équation du mouvement de l'électron :

$$\underbrace{m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}}_{\frac{d}{dt}(\text{quantité de mouvement})} = \underbrace{e \left( \vec{E} + \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{B} \right)}_{\text{force de Lorentz}} - \underbrace{\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{u}}{dt}}_{\text{force de frottement}} - \underbrace{K\vec{u}}_{\text{force de rappel}} \quad (33)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, tant que  $\left\| \frac{d\vec{u}}{dt} \right\| \ll c$ , on a  $\left\| \vec{f}_m \right\| \ll \left\| \vec{f}_e \right\|$  (i.e. la force électrique domine la force magnétique). On négligera donc  $\vec{f}_m$  en général, sauf dans le cas où il existe un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_o$  intense (comme c'est le cas par exemple dans l'ionosphère terrestre, soumise au champ géomagnétique quasi-statique en plus du champ électromagnétique de l'onde). Dans ces conditions, et après projection sur la direction parallèle à  $\vec{E}$ , l'équation du mouvement (équation 33) prend la forme d'une équation différentielle linéaire du second ordre :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = eE - \frac{m}{\tau} \frac{du}{dt} - Ku \iff \boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + \omega_o^2 u = \frac{e}{m} E} \quad \text{avec : } \boxed{\omega_o = \sqrt{K/m}} \quad (34)$$

Grâce à cette équation, nous étudions dans la suite le comportement de différents types de milieux par une *analyse harmonique*. Le champ électrique  $\vec{E}$  et le déplacement des charges  $\vec{u}$  sont supposés prendre la forme :

$$\underline{E}(t) = E_o e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = U e^{i(\omega t + \varphi)} = \underline{u} e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{u} = U e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \quad (35)$$

On prendra donc garde à se souvenir que  $\underline{u}(\omega)$  est l'amplitude *complexe* de  $u(t)$ . On écrit  $\underline{u}(\omega)$  car l'amplitude réelle  $U$  ainsi que le déphasage de la réponse  $\varphi$  dépendent a priori de la pulsation du forçage électrique  $\omega$ , comme nous allons le voir immédiatement.

En insérant ces quantités complexes dans l'équation du mouvement (équation 34), on obtient la relation entre les amplitudes complexes de  $\vec{E}$  et  $\vec{u}$  :

$$-\omega^2 \underline{u} + i\omega\gamma \underline{u} + \omega_o^2 \underline{u} = \frac{e}{m} E_o \iff \boxed{\underline{u}(\omega) = \frac{\frac{e}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} E_o} \quad (36)$$

Dans l'expression ci-dessus, la variable  $\tau = 1/\gamma$  désigne le *temps de relaxation* ou le *temps caractéristique d'amortissement*, c'est à dire le temps moyen séparant deux collisions successives. Quant à la constante de la force de rappel  $K$ , celle-ci est associée à la *pulsation de résonance* des vibrations du système électron-noyau  $\omega_o$ . Cette force de rappel n'a de sens que lorsqu'on considère les charges liées : pour des charges libres, la force de rappel ne joue pas de rôle, de sorte que  $K = 0$  et  $\omega_o = 0$ . Ce cas extrême est rencontré pour les *conducteurs parfaits*. Enfin, l'intensité du champ électrique  $E_o$  intègre ici l'ensemble des contributions au champ électrique total, c'est à dire :

$$E_o^{\text{total}} = E_o^{\text{ext}} + E_o^{\text{pol}} \quad (37)$$

Le comportement d'une large gamme de milieux peut être décrit à l'aide du modèle de Drude-Lorentz :

- diélectrique :  $\omega_o \neq 0$  ;  $\gamma \neq 0$ .
- conducteur :  $\omega_o = 0$  ;  $\gamma \neq 0$ .
- plasma :  $\omega_o = 0$  ;  $\gamma = 0$ .

## 3.2 Diélectriques ( $\omega_o \neq 0$ ; $\gamma \neq 0$ )

### 3.2.1 Permittivité

Dans un diélectrique, la densité de moment dipolaire par unité de volume s'exprime :

$$P = Np = Ne\mathbf{u} \quad (38)$$

où  $N$  est le nombre de dipôles par unité de volume,  $p$  le moment dipolaire associé à chaque dipôle,  $\mathbf{u}$  est le déplacement du barycentre des charges négatives par rapport au barycentre des charges positives

(on considère ici la polarisation électronique). D'autre part, la relation constitutive entre l'intensité du champ électrique  $E$  et la polarisation  $P$  (équation 21) permet d'exprimer la valeur du déplacement  $u$  en fonction de  $E$  :

$$P = \epsilon_o \chi_e E = (\epsilon - \epsilon_o) E \implies u = \frac{\epsilon_o \chi_e}{Ne} E = \frac{\epsilon - \epsilon_o}{Ne} E \quad (39)$$

En régime variable ( $E(\omega)$  avec  $\omega > 0$ ), le déplacement  $u$  ne va plus nécessairement "suivre" les variations du champ électrique, car le terme de retard (proportionnel à  $\gamma = 1/\tau$ ) implique l'existence d'un terme transitoire en  $\{e^{-t/\tau}\}$  dans la réponse des charges liées au forçage électrique. En effectuant une analyse harmonique à l'aide du modèle de Drude-Lorentz (équation 36), on constate que la permittivité ( $\epsilon$ ) et la susceptibilité ( $\chi_e$ ), qui relie d'une part le déplacement associé à la polarisation ( $u$ ) et d'autre part le forçage électrique ( $E$ ), sont nécessairement des quantités complexes. Les relations constitutives permettent de dégager leur expression en régime harmonique :

$$\underline{D}_o = \epsilon_o E_o + \underline{P}_o = \epsilon_o(1 + \underline{\chi}_e(\omega)) E_o = \underline{\epsilon}(\omega) E_o \implies \underline{P}_o = (\underline{\epsilon}(\omega) - \epsilon_o) E_o \quad (40)$$

Où  $\underline{D}_o$  et  $\underline{P}_o$  sont les amplitudes complexes de l'excitation électrique et de la densité volumique de polarisation. Puisque  $\underline{P}_o(\omega) = Ne \underline{u}(\omega)$ , par identification des équations 36 et 40, on aboutit à l'expression de la permittivité complexe :

$$\boxed{\underline{\epsilon}(\omega) = \epsilon_o + \frac{\epsilon_o \omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}} \quad (\in \mathbb{C}) \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_o}} \quad (\text{pulsation plasma}) \quad (41)$$

Physiquement, le fait que la permittivité soit une quantité complexe implique l'existence d'un *déphasage* entre  $E$  et  $P$ . Il est alors possible de décomposer la permittivité sous forme partie réelle et partie imaginaire :

$$\boxed{\underline{\epsilon}(\omega) = \epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega)} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \epsilon'(\omega) = \epsilon_o + \frac{\epsilon_o \omega_p^2 (\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \\ \epsilon''(\omega) = \frac{\epsilon_o \omega_p^2 \omega \gamma}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \end{cases} \quad (42)$$

Les parties réelle et imaginaire de  $\underline{\epsilon}(\omega)$  sont représentées dans la Figure 2. On constate que  $\epsilon'(\omega)$  et  $\epsilon''(\omega)$  varient fortement au voisinage de la pulsation  $\omega = \omega_o$ . La partie imaginaire  $\epsilon''(\omega)$  présente un maximum pour  $\omega = \omega_o$ . Nous verrons que ce maximum correspond à une *forte absorption* de l'onde incidente. Lorsque  $|\omega - \omega_o| \gg (\omega + \omega_o)$ , on a  $\epsilon''(\omega) \approx 0$  (peu d'absorption). La partie réelle  $\epsilon'(\omega)$  varie également en fonction de  $\omega$ . Puisque l'indice de réfraction  $n$  est donné par  $n^2 = (c/v)^2 = \mu_{\text{rel}} \epsilon_{\text{rel}}$  (équation 26), ces domaines de fortes variations de  $\underline{\epsilon}$  correspondent à une forte dépendance de la vitesse de propagation des ondes  $v$  par rapport à la pulsation  $\omega$ . Le milieu est donc *dispersif*. Au voisinage de  $\omega_o$ , la partie réelle  $\epsilon'(\omega)$  décroît rapidement en fonction de  $\omega$ . Au contraire, lorsque  $|\omega - \omega_o| \gg (\omega + \omega_o)$ , la fonction  $\epsilon'(\omega)$  est croissante et  $\underline{\epsilon}(\omega) \approx \epsilon'(\omega) \in \mathbb{R}$ . La croissance de  $\epsilon'(\omega)$  correspond à une diminution de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ . Il s'agit du domaine de *dispersion normale*, c'est à dire celui qui nous est le plus familier : la couleur bleue ( $\lambda$  petit ou  $\omega$  élevée) est davantage réfractée que la couleur rouge ( $\lambda$  grand ou  $\omega$  faible) dans l'eau ou dans le verre. Le domaine dans lequel  $n$  diminue en fonction de  $\omega$  est le domaine de la *dispersion anormale*. Il n'est présent que dans une gamme restreinte de pulsations situées à proximité de  $\omega_o$ . Il est par ailleurs associé à une forte dispersion de l'onde.

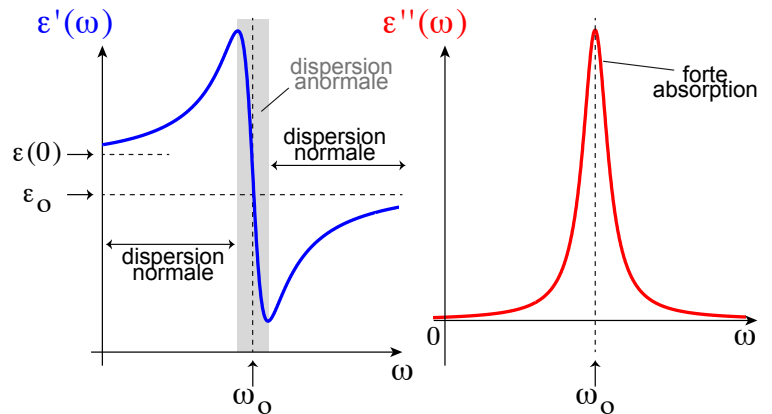


FIGURE 2

On constate également, à partir de la Figure 2, que les valeurs asymptotiques de la permittivité ne sont pas les mêmes en deçà et au delà du domaine de forte absorption :  $\epsilon_{BF} \rightarrow \epsilon(0)$  à basse fréquence ( $\omega \ll \omega_o$ ), alors que  $\epsilon_{HF} \rightarrow \epsilon_o$  à haute fréquence ( $\omega \gg \omega_o$ ). La permittivité, et donc la vitesse de propagation des ondes, ne sera donc pas la même pour deux fréquences situées de part et d'autre de ce domaine. Ainsi, pour l'eau, l'indice de réfraction à basse fréquence (domaine micro-onde) est très élevé ( $n_{BF}^{eau} \approx 9$ ), alors que, à haute fréquence (domaine visible), l'indice de réfraction est proche de celui du vide ( $n_{HF}^{eau} \approx 1.33$ ).

### 3.2.2 Susceptibilité

Comme mentionné ci-dessus, le déphasage entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  est responsable du phénomène d'absorption. En régime harmonique, l'amplitude et le déphasage de  $\vec{P}$  sont reliés à l'amplitude et à la pulsation de  $\vec{E}$  par l'intermédiaire de la susceptibilité complexe  $\underline{\chi}_e$  :

$$\underline{P}_o = \epsilon_o \underline{\chi}_e E_o \quad (43)$$

Puisque  $\epsilon_o$  et  $E_o$  sont réels, on a :  $\arg(\underline{P}_o) = \arg(\underline{\chi}_e)$ . Il est donc suffisant d'exprimer la susceptibilité  $\underline{\chi}_e$  en fonction de  $\omega$  pour étudier le déphasage entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  :

$$\underline{\chi}_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} - 1 \implies \boxed{\underline{\chi}_e(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \frac{\chi_e(0)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + i\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)\gamma}} \quad \text{avec} \quad \chi_e(0) = \left(\frac{\omega_p}{\omega_o}\right)^2 \quad (44)$$

De même, en décomposant  $\underline{\chi}_e$  en partie réelle et partie imaginaire :

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \chi'_e(\omega) - i\chi''_e(\omega) \quad \text{avec} : \quad \begin{cases} \chi'_e(\omega) &= \chi_e(0) \frac{\omega_o^2 (\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \\ \chi''_e(\omega) &= \chi_e(0) \frac{\omega_o^2 \omega \gamma}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \end{cases} \quad (45)$$

Etudions les caractéristiques du déphasage entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  en fonction de  $\omega$  :

- $\omega \ll \omega_o \implies \underline{\chi}_e(\omega) \approx \chi_e(0) \in \mathbb{R}$  :  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sont en phase.
- $\omega = \omega_o \implies \underline{\chi}_e(\omega) = -i \frac{\omega_o}{\gamma} \chi_e(0) = \frac{\omega_o}{\gamma} \chi_e(0) e^{-i\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{C}$  :  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sont en quadrature de phase.
- $\omega \gg \omega_o \implies \underline{\chi}_e(\omega) = -\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 \chi_e(0) = \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 \chi_e(0) e^{i\pi}$  :  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sont en opposition de phase.
- $\omega \rightarrow +\infty \implies \underline{\chi}_e \rightarrow 0 \in \mathbb{R}$  : le milieu se comporte comme le vide.

### 3.2.3 Dissipation

Le déphasage entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  est également impliqué dans le calcul de la quantité d'énergie dissipée par l'onde lorsque celle-ci pénètre dans le milieu. En effet, la puissance cédée par l'onde correspond au travail effectué par la force électrique au cours du déplacement des charges participant au courant de polarisation :

$$\mathcal{P} = \vec{j}_{\text{pol}} \cdot \vec{E} = \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} \quad (46)$$

Le champ électrique  $\vec{E}$  associé à l'onde est supposé harmonique :

$$E(t) = E_o \cos \omega t = \Re \{ E_o e^{i\omega t} \} = \Re \{ \underline{E}(t) \} \quad (47)$$

Dès lors, la réponse du milieu en terme de polarisation obéit à la même structure harmonique :

$$P(t) = P_o \cos(\omega t + \varphi) = \Re \{ P_o e^{i(\omega t + \varphi)} \} = \Re \{ \underline{P}_o e^{i\omega t} \} = \Re \{ \underline{P}(t) \} \quad (48)$$

Par ailleurs, l'amplitude complexe de la polarisation  $\underline{P}$  s'exprime :

$$\underline{P}_o = \epsilon_o \underline{\chi}_e(\omega) E_o = \epsilon_o (1 + \underline{\epsilon}_{\text{rel}}(\omega)) \underline{E}_o \quad \text{avec} : \quad \underline{\epsilon}_{\text{rel}}(\omega) = \epsilon'_{\text{rel}}(\omega) - i \epsilon''_{\text{rel}}(\omega) \quad (49)$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(t) &= \Re \{ \underline{P}(t) \} = \Re \{ E_o \epsilon_o (1 + \epsilon'_{\text{rel}} - i \epsilon''_{\text{rel}}) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \} \\ &= \epsilon_o [(\epsilon'_{\text{rel}} + 1) \cos \omega t + \epsilon''_{\text{rel}} \sin \omega t] E_o \end{aligned} \quad (50)$$

D'où, en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\epsilon_o \omega [(\epsilon'_{\text{rel}} + 1) \sin \omega t - \epsilon''_{\text{rel}} \cos \omega t] E_o \quad (51)$$

Ainsi, d'après l'équation 46, la puissance dissipée prend la forme :

$$\mathcal{P} = -\epsilon_o \omega [(\epsilon'_{\text{rel}} - 1) \cos \omega t \sin \omega t - \epsilon''_{\text{rel}} \cos^2 \omega t] E_o^2 \quad (52)$$

Finalement, puisque  $\langle \cos \sin \rangle_t = 0$  et  $\langle \cos^2 \rangle_t = \frac{1}{2}$ , la puissance dissipée moyenne s'exprime donc<sup>2</sup> :

$$\langle \mathcal{P} \rangle_t = \frac{1}{2} \epsilon_o \omega E_o^2 \epsilon''_{\text{rel}} \quad (53)$$

Cette analyse indique que la puissance dissipée par l'onde au cours de sa traversée du milieu est proportionnelle à la partie imaginaire de la permittivité. Cette dissipation s'effectue par *effet Joule*. Le chauffage par micro-ondes repose sur ce principe : en ajustant la pulsation de l'onde incidente, une partie de l'énergie transportée par l'onde est transformée en chaleur. Les fours micro-ondes domestiques exploitent ce phénomène en s'approchant de la fréquence de résonance en polarisation d'orientation des molécules d'eau liquide. Cependant, la fréquence effectivement utilisée dans les fours micro-ondes ( $f_o \approx 2.45\text{GHz}$ ) est inférieure à la fréquence de résonance des molécules d'eau, de telle sorte que l'onde puisse pénétrer dans la matière et ainsi la cuire "à cœur". Cette fréquence correspond à une longueur d'onde de  $\lambda_o \approx 12.2\text{ cm}$ , ce qui la place dans le domaine des ondes centimétriques.

### 3.2.4 Régimes limites et relation de dispersion

Quel est le comportement du milieu lorsque la pulsation de l'onde incidente est éloignée de la pulsation de résonance ? Pour répondre à cette question, il faut considérer une onde dont le temps caractéristique d'évolution est très différent de  $\tau = 1/\gamma$ . On choisira donc d'étudier la permittivité dans le domaine :

$$|\omega - \omega_o| \gg \gamma \quad (54)$$

Dans ce domaine, comme il a été montré ci-dessus, la permittivité et la susceptibilité sont réelles (Figure 3) :

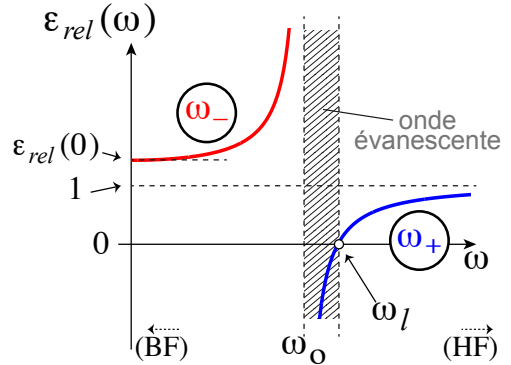


FIGURE 3

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{rel}} &\approx \epsilon'_{\text{rel}} = 1 + \chi'_e = 1 + \chi_e(0) \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2} \\ \Rightarrow \quad \epsilon_{\text{rel}} &\approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2} \in \mathbb{R} \quad \text{avec : } \omega_p^2 = \frac{N e^2}{m \epsilon_o} \quad (\text{pulsation plasma}) \end{aligned} \quad (55)$$

On trouve  $\epsilon_{\text{rel}} = 0$  pour  $\omega = \omega_l$  tel que :  $\omega_l^2 = \omega_o^2 + \omega_p^2$ . Pour  $\omega < \omega_o$  ou  $\omega > \omega_l$ , on retrouve les domaines de dispersion normale évoqués ci-dessus.

L'établissement de la relation de dispersion dans ces domaines peut être effectué simplement moyennant certaines hypothèses. Nous supposons que le milieu considéré est *non magnétique*, i.e. :

$$\mu = \mu_o \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{H} = \vec{B}/\mu_o \\ \vec{D} = \epsilon_{\text{rel}} \epsilon_o \vec{E} \end{cases} \quad \text{et} \quad \epsilon v^2 = \epsilon_o c^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{c^2}{\epsilon_{\text{rel}}} \quad (56)$$

2. Cette expression peut être mise en évidence plus rapidement en repartant de l'expression de la puissance dissipée comme un produit de deux complexes conjugués (le symbole \* indiquant une quantité conjuguée) :

$$\langle \mathcal{P} \rangle_t = \langle \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{pol}} \rangle_t = \langle \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \left\{ \underline{E} \cdot \left( \frac{\partial \underline{P}}{\partial t} \right)^* \right\} = \frac{1}{2} \Re \{ \underline{E} \cdot (-i \omega \underline{P})^* \} = \frac{1}{2} \Re \{ i \omega \epsilon_o (1 + \epsilon'_{\text{rel}} - i \epsilon''_{\text{rel}}) \underline{E} \cdot \underline{E}^* \} = \frac{1}{2} \epsilon_o \omega E_o^2 \epsilon''_{\text{rel}}$$

Sous cette condition, les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday en régime harmonique impliquent :

$$\left( \vec{\nabla}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right) \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{Équation de Helmholtz}) \quad (57)$$

De même, à l'aide des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Flux, une expression identique émerge pour le champ magnétique  $\vec{B}$ . On notera que l'établissement de l'équation 57 nécessite uniquement que la variation temporelle de  $\vec{E}$  suive une fonction harmonique. Sa dépendance spatiale peut prendre une forme quelconque ( $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o(\vec{r}) e^{i\omega t}$ ). Si, en revanche, on cherche à déterminer les conditions permettant l'existence d'une onde progressive, la dépendance spatiale doit également avoir une forme harmonique ( $\vec{E}_o(\vec{r}) = \vec{E}_o e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ ). La relation de dispersion apparaît alors lorsqu'on injecte l'expression complète du champ électrique ondulatoire dans l'équation 57 :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \implies \left( \underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\text{rel}} \right) \vec{E}_o = \vec{0} \implies \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\text{rel}} \quad (58)$$

On remarque que, si  $\epsilon_{\text{rel}} \in \mathbb{R}$ , l'expression ci-dessus implique que l'on peut avoir  $\underline{k} \in \mathbb{C}$  si  $\epsilon_{\text{rel}} < 0$ . Pour dégager l'expression du vecteur d'onde  $k$  en fonction de  $\omega$ , trois cas doivent donc être distingués :

—  $\omega = \omega_l = \sqrt{\omega_o^2 + \omega_p^2} \implies \epsilon_{\text{rel}} = 0$  : dans ce cas, l'équation de Maxwell-Ampère implique :

$$v^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} + i \frac{\omega}{v^2} \vec{E} = v^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0} \implies \vec{B} = \vec{0} \implies \vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (59)$$

Une telle onde est *purement électrique et longitudinale*. Cette onde particulière est le fruit d'une *oscillation collective des charges liées* sous l'effet d'une force de rappel exercée sur les électrons liés résultant (1) de la force de rappel du noyau (terme  $K\vec{u}$  dans l'équation 33) et (2) de la force de rappel coulombienne exercée par les autres charges (terme  $e\vec{E} = e\epsilon_o\vec{P} \propto e^2\epsilon_o\vec{u}$ ). On verra plus bas que, dans le cas d'un milieu conducteur, la force de rappel exercée par le noyau est négligeable ( $K = 0$ , donc  $\omega_o \equiv 0$ ), et que cette onde longitudinale se réduit à l'*onde plasma*, de pulsation  $\omega_p$ , analogue électrique des ondes de pression en acoustique.

- $\omega \in [\omega_o; \omega_l] \implies \epsilon_{\text{rel}} < 0$  : le vecteur d'onde  $k$  est donc imaginaire pur. Ce mode d'oscillation correspond à une *onde évanescente*, c'est à dire à une onde ayant perdu sa propriété de propagation<sup>3</sup>.
- $\omega \in [-\infty; \omega_o] \cup [\omega_l; +\infty] \implies \epsilon_{\text{rel}} > 0$  : le vecteur d'onde est alors réel :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2} \right) \quad (60)$$

$$\iff \omega^4 - \omega^2(k^2 c^2 + \omega_o^2 + \omega_p^2) + k^2 c^2 \omega_o^2 = 0$$

En procédant au changement de variable  $\Omega = \omega^2$ , cette équation polynomiale du quatrième degré en  $\omega$  se transforme en une équation du second degré en  $\Omega$ . La résolution de cette équation permet d'aboutir à deux régimes de pulsations possibles :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k^2 c^2 + \omega_o^2 + \omega_p^2}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{k^2 c^2 + \omega_o^2 + \omega_p^2}{2} \right)^2 - k^2 c^2 \omega_o^2} \quad (61)$$

On constate immédiatement que les deux branches  $\omega_+$  et  $\omega_-$  correspondent à des modes haute fréquence (HF) et basse fréquence (BF) qui peuvent co-exister pour chaque valeur particulière du vecteur d'onde  $k$ , ou, de façon équivalente, pour chaque longueur d'onde  $\lambda$  (Figure 4). Pour chaque mode, la vitesse de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  est inférieure à  $c$ .

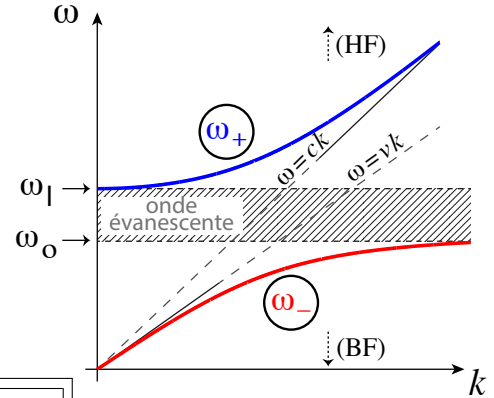


FIGURE 4

3. A fortiori, dans l'hypothèse  $\epsilon_{\text{rel}} \in \mathbb{C}$ , c'est à dire lorsque  $|\omega - \omega_o| \sim \gamma$ , on a  $\underline{k} \in \mathbb{C}$ . Ce régime correspond à une absorption progressive de l'onde. La partie réelle de la permittivité contient la composante de propagation de l'onde.

→  $\lambda$  grande  $\iff k$  petit  $\iff k \ll \frac{\omega_o}{c}$ . Les deux pulsations possibles et les vitesses de phase correspondantes sont alors<sup>4</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_+ \approx \omega_l \quad ; \quad v_g^+(0) = 0 \quad \implies \text{pas de propagation} \\ \omega_-(0^+) \stackrel{(\text{Taylor})}{\approx} \omega_-(0) + v_g^-(0).k \quad ; \quad v_g^-(0) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{rel}}(0)}} = v \quad \implies \begin{array}{l} \text{milieu non dispersif} \\ n = \sqrt{\epsilon_{\text{rel}}(0)} \end{array} \end{array} \right. \quad (62)$$

→  $\lambda$  petite  $\iff k$  grand  $\iff k \gg \frac{\omega_o}{c}$ . On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_+ \stackrel{(\text{Taylor})}{\approx} \omega_+(0) + v_g^+(+\infty).k \quad ; \quad v_g^+(+\infty) = c \quad \implies \text{milieu non dispersif, } n = 1 \\ \omega_- \approx \omega_o \quad ; \quad v_g^- = 0 \quad \implies \text{pas de propagation} \end{array} \right. \quad (63)$$

→ valeurs de  $\lambda$  intermédiaires : le milieu est alors fortement dispersif.

### 3.2.5 Les différents types de polarisation

De façon plus générale, le phénomène “macroscopique” de polarisation est la manifestation de processus “microscopiques” distincts :

- polarisation électronique : c’est l’exemple que nous venons de traiter. Elle domine aux hautes fréquences.
- polarisation ionique : il s’agit d’un phénomène analogue, à la différence que les charges mobiles sont les *ions* (chargés positivement : *cations* ; chargés négativement : *anions*). Ce type de polarisation est caractéristique des cristaux ioniques. Du fait de la masse des porteurs de charge, la polarisation ionique est significative pour des fréquences plus basses que la polarisation électronique.
- polarisation d’orientation : cette polarisation met en jeu l’orientation des *molécules polaires* en réponse au champ électrique ambiant (Figure 5). Le champ électrique extérieur  $\vec{E}^{\text{ext}}$  induit sur les molécules polaires  $\vec{p}_o$  un couple  $\vec{\Gamma} = \vec{p}_o \wedge \vec{E}^{\text{ext}}$  tendant à aligner les dipôles (et donc les molécules) parallèlement au champ électrique. La polarisation d’orientation tend à *organiser* les constituants du milieu sous l’effet du champ électrique extérieur. Ce processus entre donc en compétition avec l’*agitation thermique*, qui a pour effet de désorganiser les orientations des molécules. Par ailleurs, la polarisation d’orientation peut *saturer* lorsque l’organisation est maximale : la polarisation d’orientation ne peut plus augmenter une fois que toutes les molécules sont parallèles au champ électrique extérieur. En conséquence, l’intensité de la polarisation d’orientation est proportionnelle

au facteur de Boltzmann :  $e^{-\frac{\vec{p}_o \cdot \vec{E}^{\text{ext}}}{kT}}$ . À température ambiante, il est possible de linéariser :  $\|\vec{P}\| = \alpha \epsilon_o \|\vec{E}\|$ . La polarisation d’orientation domine aux basses fréquences.

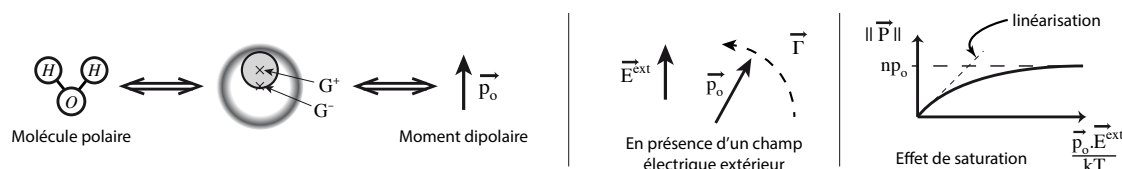


FIGURE 5

Ces différents processus microscopiques dominent dans des gammes de pulsations distinctes, suivant l’échelle spatiale à laquelle ils sont associés. En conséquence, la permittivité d’un matériau donné pourra présenter des variations assez complexes en fonction de  $\omega$  (Figure 6, d’après Pérez et al. (1996)).

4. On utilise ici le développement de Taylor au voisinage de 0 :

$$\text{Lorsque } k \rightarrow 0^+, \quad \omega(k) \approx \omega(k=0) + \frac{d\omega}{dk}(k=0).k = \omega(k=0) + v_g(k=0).k$$



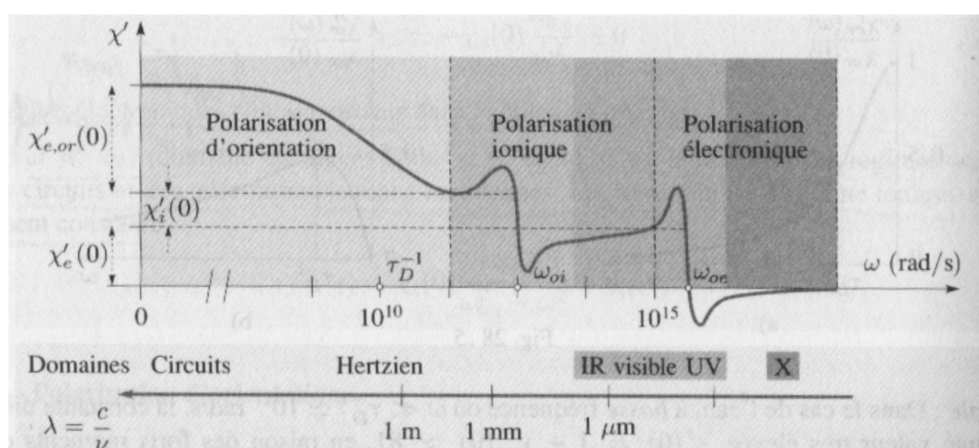


FIGURE 6

### 3.3 Conducteurs ( $\omega_o \rightarrow 0$ ; $\gamma \neq 0$ )

#### 3.3.1 Conductivité en régime permanent

Dans un milieu contenant des charges libres, le mouvement des charges libres est caractérisé par une insensibilité au terme de force de rappel ( $K = 0$  dans l'équation 33). L'équation du mouvement prend alors la forme simplifiée :

$$K = 0 \implies \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{\tau} = \frac{e}{m} \vec{E} \implies \vec{u} = \underbrace{\vec{A}e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{e\tau}{m} \vec{E}}_{\text{régime permanent}} \quad (64)$$

En régime permanent, c'est à dire lorsque l'état stationnaire a été atteint, la vitesse limite des charges de conduction est donc proportionnelle à l'intensité du champ  $\vec{E}$ . Le facteur de proportionnalité est la *conductivité électrique nominale*  $\sigma$  (réelle) :

$$\vec{j}_{\text{cond}} = Ne\vec{u} \rightarrow \sigma(0)\vec{E} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\sigma(0) = \frac{Ne^2\tau}{m} = \frac{\epsilon_o\omega_p^2}{\gamma}} \quad (\in \mathbb{R} \text{ en régime permanent}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_o m} \\ \tau = \frac{1}{\gamma} \end{cases} \quad (65)$$

En régime variable, comme c'est le cas lorsqu'une onde électromagnétique produit un mouvement oscillatoire forcé des charges mobiles, le modèle de Drude-Lorentz permet de faire émerger le comportement dynamique du milieu.

#### 3.3.2 Conducteur imparfait ou mauvais isolant ?

Avant d'étudier en détail le comportement du conducteur parfait ( $K = 0 \implies \omega_o = 0$ ), examinons dans quelles conditions un milieu peut être qualifié de conducteur. Pour cela, il faut dans un premier temps considérer la conductivité comme une quantité complexe en régime harmonique (équation 36) :

$$\vec{j}_{\text{variable}} = Ne\vec{u}(\omega) = \frac{i\omega \frac{Ne^2}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \vec{E}_o = \frac{i\omega\epsilon_o\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \vec{E}_o = \underbrace{\sigma(\omega)}_{\text{conductivité complexe}} \vec{E}_o \quad \text{ou} \quad \omega_o^2 = \frac{K}{m} \quad (66)$$

La conductivité complexe peut être décomposée en partie réelle et partie imaginaire :

$$\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) - i\sigma''(\omega) \quad (67)$$

L'expression de la conductivité complexe ci-dessus s'applique à tout milieu contenant des charges mobiles. Dans le cas  $\omega_o \neq 0$  (diélectrique), la densité de charges  $N$  correspond à la densité de charges liées. La conductivité peut alors être directement reliée à la susceptibilité du milieu (équation 44) :

$$\underline{\sigma}(\omega) = \frac{i\omega\epsilon_o\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = i\omega\epsilon_o\chi_e(\omega) \implies \begin{cases} \sigma'(\omega) &= \omega\epsilon_o\chi_e''(\omega) \\ \sigma''(\omega) &= \omega\epsilon_o\chi_e'(\omega) \end{cases} \quad (68)$$

En repartant de l'équation 66, on peut alors exprimer le courant induit comme la somme d'un terme "en phase" et d'un terme "en quadrature de phase" :

$$\vec{j}_{\text{variable}}(\omega) = \underbrace{\sigma'(\omega)\vec{E}_o}_{\text{en phase}} + \underbrace{i\omega\epsilon_o\chi_e'(\omega)\vec{E}_o}_{\text{en quadrature}} \implies \vec{j}_{\text{variable}}(t) = \sigma'(\omega)\vec{E}(t) + \chi_e'(\omega)\frac{\partial(\epsilon_o\vec{E}(t))}{\partial t} \quad (69)$$

En l'absence de courant de conduction indépendant et existant par ailleurs (cas non considéré ici), ce courant correspond au courant total circulant dans le milieu en réaction au champ électrique total :  $\vec{j}_{\text{variable}} \equiv \vec{j}_{\text{total}}$ . On peut considérer que la composante "en phase" peut être identifiée au comportement "conducteur" du milieu, alors que la composante "en quadrature" est le résultat du courant de polarisation, et reflète donc le comportement "isolant" du milieu.

L'équation de Maxwell-Ampère sous sa forme première (équation 12), qui relie les champs électrique et magnétique au courant total, permet de quantifier l'impact sur le champ magnétique de ce courant total. Il s'agit ici de saisir l'importance du couplage (ou du découplage) entre les deux champs, et de déterminer ainsi quel comportement domine au sein du milieu (conducteur ou isolant) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{B}/\mu_o) &= \vec{j}_{\text{total}} + \frac{\partial(\epsilon_o\vec{E})}{\partial t} & \text{(MA)} \\ &= \underbrace{\sigma'(\omega)\vec{E}}_{\vec{j}_{\text{cond}}} + \underbrace{\epsilon'(\omega)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\vec{j}_{\text{déplac}}} & \text{(avec } \epsilon_o(1 + \chi_e) = \epsilon') \end{aligned} \quad (70)$$

Le rapport des normes du *courant de conduction*  $j_{\text{cond}}$  et du *courant de déplacement*  $j_{\text{déplac}}$  permet de classifier le comportement du milieu, suivant la pulsation de l'onde qui le traverse :

$$\frac{j_{\text{cond}}}{j_{\text{déplac}}} = \frac{\sigma'}{\omega\epsilon'} \implies \begin{cases} \omega \ll \frac{\sigma'}{\epsilon'} \implies \vec{\nabla} \wedge (\vec{B}/\mu_o) \approx \sigma'\vec{E} & : \text{milieu conducteur} \\ \omega \gg \frac{\sigma'}{\epsilon'} \implies \vec{\nabla} \wedge (\vec{B}/\mu_o) \approx \epsilon'\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & : \text{milieu isolant} \end{cases} \quad (71)$$

Lorsque  $\omega \sim \sigma'/\epsilon'$ , les deux contribution au courant total doivent être considérées. Le milieu possède donc un comportement de mauvais isolant ou de conducteur imparfait. Puisque la conductivité  $\sigma'$  ou la permittivité  $\epsilon'$  sont des propriétés intrinsèques du milieu, celles-ci peuvent conserver des valeurs approximativement constantes pour de grandes gammes de pulsations  $\omega$ . Suivant la pulsation  $\omega$ , le comportement d'un milieu donné pourra donc tantôt être conducteur (plutôt à basse fréquence), tantôt être un isolant (plutôt à haute fréquence).

### 3.3.3 Conducteur parfait

Pour un conducteur parfait, l'expression de la conductivité prend une forme simplifiée, car  $K = 0 \implies \omega_o = 0$  (pas de force de rappel électron-noyau). On en déduit :

$$\text{Pour un conducteur : } \boxed{\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\epsilon_o\omega_p^2}{\gamma + i\omega} \text{ (} \in \mathbb{C} \text{ en régime variable) } \implies \begin{cases} \sigma'(\omega) &= \frac{\sigma(0)}{1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \\ \sigma''(\omega) &= \frac{\frac{\omega}{\gamma}\sigma(0)}{1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \end{cases} \quad (72)$$

Par rapport à l'expression de la conductivité réelle en régime permanent (cf. équation 65), le terme  $\{i\omega\}$  apparaissant au dénominateur dans l'expression de la conductivité complexe (équation 85) signifie qu'un

déphasage entre le courant de conduction et le champ électrique de l'onde va apparaître. Ce déphasage ne s'exprimera que dans certaines gammes de fréquence (Figure 7).

À basse fréquence (i.e. pour des périodes d'oscillations  $T = 2\pi/\omega$  grandes par rapport à la constante de temps de réaction du système  $\tau$ ), la conductivité complexe en régime variable tend vers la conductivité nominale en régime permanent :

$$\text{Lorsque : } \omega \ll \frac{2\pi}{\tau} \sim \frac{1}{\tau} = \gamma \implies \underline{\sigma}(\omega) \rightarrow \sigma(0) = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\gamma} = \frac{Ne^2}{m\gamma} \quad (73)$$

Ce régime ( $\omega \ll 1/\tau$ ) correspond à l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). Dans l'ARQS, le milieu répond immédiatement à la sollicitation imposée par le champ électrique. Le champ électrique incident associé avec l'onde électromagnétique mettra donc en mouvement les charges libres avec un temps de latence négligeable. Ces charges en mouvement vont alors à leur tour donner naissance à un champ électrique. Ce champ induit va se superposer avec le champ incident. Dès lors, une interaction très forte va apparaître entre l'onde et le milieu. L'onde en sera par conséquent fortement modifiée. Afin de quantifier cette modification (célérité, longueur d'onde), il faut procéder à une analyse des régimes limites à l'aide de la relation de dispersion.

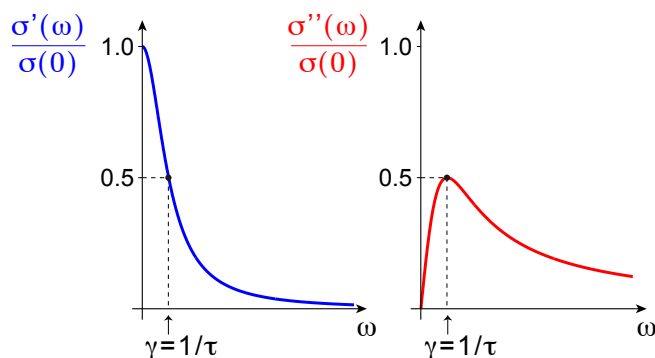


FIGURE 7

### 3.3.4 Régimes limites et relation de dispersion

On se place ici à nouveau dans le cas d'un milieu non magnétique (équation 56). Dans ces conditions, on a vu que l'utilisation de l'équation de Helmholtz (équation 57) permet de faire émerger la relation de dispersion (équation 58) :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\text{rel}} \quad (74)$$

Cependant, puisque l'on a affaire à un conducteur, la quantité pertinente pour caractériser la réponse du milieu n'est plus la permittivité  $\epsilon_{\text{rel}}$  mais la conductivité  $\underline{\sigma}$ . Ces deux quantités sont reliées par :

$$\epsilon_{\text{rel}}(\omega) = 1 + \underline{\chi}_e(\omega) = 1 + \frac{\underline{\sigma}(\omega)}{i\omega\epsilon_0} = 1 + \frac{\frac{\omega_p^2}{\gamma + i\omega}}{i\omega} = 1 - \frac{(\omega_p/\omega)^2}{1 + \frac{1}{i\omega\tau}} \implies \boxed{\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} \left[ \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 + \frac{1}{i\omega\tau}} \right]} \quad (75)$$

Plusieurs cas doivent alors être distingués pour évaluer la structure de l'onde associée. Pour se fixer les idées, on considèrera ici le cas du cuivre, dont les caractéristiques sont :

$$\boxed{\text{Pour le cuivre : } \tau \sim 10^{-14} \text{ s} \quad \text{et} \quad \omega_p \sim 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}} \quad (76)$$

- $\boxed{\omega \ll 1/\tau \ll \omega_p}$  : ce cas est rencontré dans les métaux pour les fréquences "faibles", c'est à dire pour le cuivre pour  $f < 10^{13}$  Hz (i.e. à partir des radiofréquences). Le vecteur d'onde s'écrit alors<sup>5</sup> :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{(1-i)^2}{\delta^2}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma(0)\omega}} \quad (\text{épaisseur de peau})} \quad (77)$$

5. Plusieurs étapes de calcul sont ici nécessaires. On les franchit en utilisant les relations suivantes :

$$\sigma(0) = \epsilon_0 \omega_p^2 \tau \quad (1-i)^2 = -2i$$

On obtient alors l'expression du vecteur d'onde complexe :

$$\underline{k} = k' + i k'' = \pm \frac{1 - i}{\delta} \quad (78)$$

La propagation d'une onde dans le sens des  $x$  croissants correspond à la solution  $k' > 0 \implies \underline{k} = (1 - i)/\delta$ . Une telle onde prend la forme :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_o e^{i(\omega t - \underline{k}x)} = \vec{E}_o \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{atténuation}} \underbrace{e^{i(\omega t - x/\delta)}}_{\text{propagation}} \quad (79)$$

Cette onde est caractérisée par une propagation avec un vecteur d'onde  $k' = 1/\delta$ , soit une vitesse de phase  $v_\Phi = \omega/k' = \omega\delta$ . Cependant, cette onde est *atténuée* exponentiellement en  $k'' = 1/\delta$ . L'onde ne pénètre dans le milieu que sur une épaisseur de quelques  $\delta$ . À la limite  $\omega \rightarrow 0$  (approximation basse fréquence), l'épaisseur de peau tend vers 0 et la vitesse de phase devient nulle. L'onde ne pénètre plus du tout dans le milieu. De même, lorsqu'on considère le cas d'un conducteur parfait ( $\sigma(0) \rightarrow \infty$ ), on retrouve  $\delta \rightarrow 0$  et  $v_\Phi \rightarrow 0$ . Ce cas correspond à une *onde évanescente*, c'est à dire une onde ne se propageant pas dans le milieu.

—  $\omega \gg 1/\tau$  : la relation de dispersion devient alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) \quad (80)$$

Plusieurs sous-cas doivent être distingués suivant le rapport entre  $\omega$  et  $\omega_p$  :

→  $\omega < \omega_p \implies \underline{k}$  est alors imaginaire pur, ce qui implique l'apparition d'une onde évanescente car alors  $\underline{k} \in \mathbb{C}$  (équation 79). De surcroît, puisque  $k' = 0$  et  $\underline{k} = k''$  :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_o e^{k''x} e^{i\omega t} \quad (81)$$

On constate que les variables spatiale et temporelle sont *séparées*. Il s'agit donc d'une *onde stationnaire*. Son origine est due à l'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchi. Dans le cas des métaux, ce phénomène produit pour les radiations visibles ( $\omega \sim 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ ) l'*éclat métallique* et la réflexion totale caractéristique des miroirs.

→  $\omega = \omega_p$  : ce cas correspond à une onde longitudinale électrique, ou *onde plasma*. Elle apparaît comme conséquence de l'oscillation collective des porteurs de charges : lorsqu'une charge de faible masse est déplacée (par exemple un électron), elle subit une force coulombienne de la part des charges immobiles, qui peuvent inclure les ions massifs chargés positivement. La force de rappel qui en résulte diffère de la force de rappel du système électron-noyau du modèle de Drude-Lorentz, qui concernait uniquement les charges liées, et dont le "ressort" n'est pas explicitement attribué à la force coulombienne à grande distance (équation 33). Au contraire, l'onde plasma correspond à une *oscillation de la densité de charges* dans un milieu conducteur. En ce sens, elle peut être comprise comme un analogue des *ondes acoustiques*, qui correspondent à une oscillation de la pression à l'intérieur d'un milieu matériel.

→  $\omega > \omega_p$  : le vecteur d'onde est alors réel (Figure 8) :

$$\underline{k} = k' = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \in \mathbb{R} \quad (82)$$

En conséquence, l'onde ne subit pas d'absorption. Le milieu est donc *transparent*. En outre, les vitesses de phase et de groupe sont :

$$\begin{aligned} k' = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} &\implies v_\Phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c \\ 2k' dk' = \frac{2}{c^2} \omega d\omega &\implies v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{k' c^2}{\omega} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c \end{aligned} \quad (83)$$

Puisque la vitesse de propagation des ondes dépend de leur pulsation, le milieu est considéré comme *dispersif*.

À la limite très haute fréquence ( $\omega \gg \omega_p$ ), la vitesse de propagation de l'onde tend vers la vitesse de la lumière dans le vide et la permittivité tend vers la permittivité du vide :

$$\omega \gg \omega_p \implies \begin{cases} v_\Phi \rightarrow c \\ v_g \rightarrow c \\ \epsilon_{\text{rel}} \rightarrow 1 \end{cases} \quad (84)$$

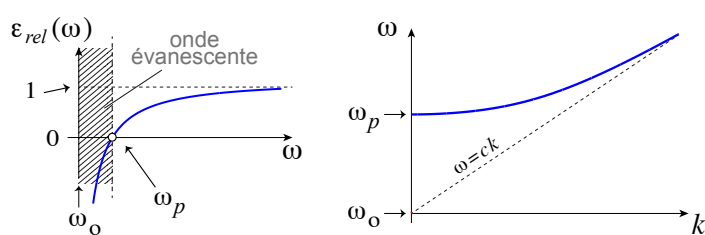


FIGURE 8

Le milieu se comporte alors comme le vide. Il ne dispose pas de suffisamment de temps pour interagir avec l'onde, et se laisse passivement traverser par les oscillations des champs électromagnétiques.

### 3.3.5 Plasma ( $\omega_o \rightarrow 0$ ; $\gamma \rightarrow 0$ )

Les plasmas sont des milieux conducteurs dont le temps de réaction  $\tau$  est très grand ( $\gamma = 1/\tau \rightarrow 0$ ). Ils sont donc caractérisés par une conductivité imaginaire pure (équation 85) :

$$\text{Pour un plasma : } \boxed{\sigma(\omega) = \frac{\epsilon_o \omega_p^2}{i\omega} \quad (\in \mathbb{C})} \quad (85)$$

Un tel milieu se comporte donc, quelle que soit la pulsation, de manière analogue à un conducteur parfait dans le domaine  $\omega \gg 1/\tau$  :

- $\omega > \omega_p$  : propagation sans atténuation, avec dispersion.
- $\omega < \omega_p$  : pas de propagation, onde évanescente, réflexion totale.

Il s'agit ici d'un comportement *passé-haut*. La pulsation de coupure est la pulsation plasma  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_o}}$ .

Dans le cas de l'ionosphère terrestre, la densité d'électrons est de l'ordre de  $N \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$ , ce qui correspond à une fréquence de coupure  $f_p \sim 9 \text{ MHz}$ . Cette valeur explique pourquoi il n'est possible de communiquer avec les satellites dans le domaine des radiofréquences qu'avec des ondes radio de longueur d'onde inférieure au mètre (domaine RADAR).

## 4 Les dioptries

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement des ondes planes progressives harmoniques en présence d'un *dioptrie*, c'est à dire d'une interface séparant deux milieux. Une telle interface est modélisée comme un plan de part et d'autre duquel les propriétés diélectriques et magnétiques sont différentes. Cette différence produit une modification de l'onde incidente : une partie de l'énergie qu'elle transporte sera *transmise* à travers le dioptrie, alors que la fraction complémentaire sera *réfléchi*e. Le rapport d'amplitude du champ électrique associé à chacune de ces deux ondes sera caractérisé par un *coefficient de transmission* et un *coefficient de réflexion*. Ce coefficient dépend des propriétés des deux milieux constituant le dioptrie, mais aussi de l'*angle d'incidence* de l'onde. D'autre part, la *direction* des ondes transmises et réfléchies obéit à des règles géométriques précises, incluant une dépendance par rapport à l'*indice de réfraction* des milieux : les *lois de la réflexion de Snell-Descartes*. Enfin, la direction de polarisation de l'onde incidence conditionne toutes ces relations. Afin de dériver l'ensemble de ces propriétés, un *point de vue ondulatoire* doit être adopté. En particulier, les équations de Maxwell doivent être mobilisées pour définir les *relations de continuité (ou de discontinuité)* des différentes composantes des champs au passage du dioptrie.

### 4.1 Ondes électromagnétiques dans les milieux sans perte

#### 4.1.1 Equations de Maxwell

Nous avons vu que, pour ce qui concerne la polarisation, le comportement d'un milieu (absorption, dispersion, vitesse de propagation des ondes) était complètement caractérisé par la forme prise par

la fonction de permittivité  $\epsilon$ . De façon analogue, les propriétés d'aimantation sont contenues dans la perméabilité  $\mu$ . En régime harmonique, la permittivité et la perméabilité peuvent être complexes ou réelles (on les note alors  $\underline{\epsilon}$  et  $\underline{\mu}$ ). Ainsi, dans le cas où  $\underline{\epsilon}(\omega) = \epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega) \in \mathbb{C}$  (équation 42), nous avons montré que la partie imaginaire de la permittivité  $\epsilon''(\omega)$  indique le comportement *absorbant* du milieu. Dans un milieu *sans perte*, on a :

$$\boxed{(\epsilon, \mu) \in \mathbb{R} \quad (\text{milieu sans perte})} \quad (86)$$

Nous allons ici étudier la structure des ondes électromagnétiques dans un tel milieu. Dans ces conditions, les équations constitutives s'écrivent (équation 19) :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (87)$$

Nous supposons que l'onde considérée est une onde plane, se dirigeant dans la direction ( $Oz$ ) :

$$\begin{cases} \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(z, t) \\ \vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}(z, t) \end{cases} \quad (88)$$

Nous supposons en outre que le milieu ne contient pas de sources de charges ou de courants :

$$\rho = 0 \quad ; \quad \vec{j} = \vec{0} \quad (89)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{MG}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (\text{M}\Phi) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{MF}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{MA}) \end{array} \quad (90)$$

On constate que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  suffisent à caractériser l'onde. Puisque  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  sont simplement reliés par une relation de colinéarité impliquant une constante de proportionnalité réelle (équation 19), les équations de Maxwell pourraient être formulées, de manière rigoureusement équivalente (mais pas à l'identique), en fonction des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  (ou encore des couples  $(\vec{D}; \vec{B})$  ou  $(\vec{D}; \vec{H})$ ). Cependant, lorsqu'on s'intéresse aux modifications subies par une onde électromagnétique au travers d'un dioptre, on verra que les relations de continuité des différentes composantes des champs rendent le traitement plus compact si le couple  $(\vec{E}; \vec{H})$  est considéré, plutôt que la couple  $(\vec{E}; \vec{B})$ . Pour cette raison, le couple  $(\vec{E}; \vec{H})$  sera ici privilégié.

#### 4.1.2 Structure des champs

De la même manière que dans le vide, on aboutit à l'équation d'onde pour les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  en manipulant ces équations :

$$\begin{array}{l} (\text{MF}) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \quad \boxed{\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \\ (\text{MA}) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \quad \boxed{\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}} \end{array} \quad \text{avec :} \quad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}} \quad (91)$$

À la lecture de ces équations, on anticipe donc que les propriétés des ondes électromagnétiques dans les milieux sans perte seront les mêmes que dans le vide, moyennant les substitutions suivantes :

$$\epsilon_o \longrightarrow \epsilon \quad ; \quad \mu_o \longrightarrow \mu \quad ; \quad c \longrightarrow v \quad (92)$$

On rappelle que les propriétés du vide sont caractérisées par les paramètres :

$$\boxed{\text{Vide}} \quad \epsilon_o ; \mu_o ; c_o = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} = c ; n_o = \frac{c}{c_o} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_o = \frac{2\pi}{k_o} = \frac{c_o}{f} ; k_o = \frac{\omega}{c_o} \quad (93)$$

Pour un milieu, ces paramètres s'expriment :

$$\boxed{\text{Milieu sans perte}} \quad \epsilon = \frac{1}{\eta v_\Phi} ; \mu = \frac{\eta}{v_\Phi} ; v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} ; n = \frac{c}{v_\Phi} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_o \epsilon_o}} = \sqrt{\mu_{\text{rel}} \epsilon_{\text{rel}}} = \frac{\eta_o}{\eta} \quad (94)$$

On supposera, pour simplifier l'analyse, que le milieu étudié est non magnétique, de sorte que  $\mu = \mu_o$  :

$$\boxed{\text{Milieu non magnétique sans perte}} \quad \mu = \mu_o ; v = \frac{c_o}{n} ; \eta = \frac{\eta_o}{n} ; \lambda = \frac{\lambda_o}{n} ; k = \frac{k_o}{n} \quad (95)$$

Les fonctions dépendant de la variable  $\{t - u/v\}$  sont solutions des équations d'ondes (équation 91). Elles correspondent aux ondes progressives se propageant dans la direction  $(Ou)$ , dans le sens des  $u$  croissants. Les solutions en  $\{t + u/v\}$  correspondent à leur contrepartie régressive. Pour simplifier l'analyse, considérerons une direction de propagation parallèle à l'axe  $(Oz)$ . Sous condition de dépendance des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  par rapport à la variable  $\{t - z/v\}$ , les propriétés de l'opérateur différentiel "Nabla"<sup>6</sup> permettent de retrouver la structure du champ électromagnétique à partir des équations de Maxwell :

$$\begin{array}{l} \text{(MA)} \\ \left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}_z \wedge \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{n}_z \cdot \left( \vec{n}_z \wedge \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \right) = \epsilon \underbrace{\vec{n}_z \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{= \partial \vec{E}_z / \partial t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_z(z, t) = E_z(z) \end{array} \right. \end{array} \quad (96)$$

$$\text{(MG)} \quad \left| \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_z(z) = 0 \quad (97)$$

On en déduit que le champ électrique ne possède que des composantes transverses :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{n}_x E_x(z, t) + \vec{n}_y E_y(z, t) \quad (\text{onde transversale}) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{k}_z \cdot \vec{E} = 0} \quad (98)$$

En utilisant les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Flux, on aboutit aux mêmes propriétés pour le champ  $\vec{H}$ .

D'autre part, l'équation de Maxwell-Faraday peut être transformée en utilisant à nouveau les propriétés de "Nabla" :

$$\text{(MF)} \quad \left| \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n}_z \wedge \vec{E}) = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{H} = \frac{\vec{n}_z}{\eta} \wedge \vec{E}} \quad (99)$$

On en déduit que le trièdre  $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{n}_z)$  est un *trièdre direct*, et que les normes des vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont proportionnelles, et reliées par l'impédance  $\eta$  via la relation :  $\|\vec{H}\| = \frac{1}{\eta} \|\vec{E}\|$ .

6. On rappelle que pour un champ vectoriel  $\vec{C}(t - z/v)$ , l'opérateur  $\vec{\nabla}$  peut s'écrire :

$$\vec{\nabla} = -\frac{\vec{n}_z}{v} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \vec{n}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{C} = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n}_z \cdot \vec{C}) = \vec{n}_z \cdot \frac{\partial \vec{C}}{\partial z} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{C} = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n}_z \wedge \vec{C}) = \vec{n}_z \wedge \frac{\partial \vec{C}}{\partial z} = -\vec{n}_x \frac{\partial C_y}{\partial z} + \vec{n}_y \frac{\partial C_x}{\partial z} \end{array} \right.$$

### 4.1.3 Solutions harmoniques, propagation dans la direction ( $Oz$ )

On s'intéressera par la suite aux solutions de l'équation d'onde de forme harmonique. On adoptera pour cela la notation complexe. La solution générale de l'onde plane progressive harmonique dans un milieu non magnétique sans perte s'écrit alors :

$$\begin{cases} \vec{E}(z,t) = \vec{E}(z)e^{i\omega t} = (\vec{E}_{o+}e^{-ikz} + \vec{E}_{o-}e^{+ikz})e^{i\omega t} = \vec{E}_{o\pm}e^{\mp ikz}e^{i\omega t} = \vec{E}_{\pm}e^{i\omega t} \\ \vec{H}(z,t) = \vec{H}(z)e^{i\omega t} = (\vec{H}_{o+}e^{-ikz} + \vec{H}_{o-}e^{+ikz})e^{i\omega t} = \vec{H}_{o\pm}e^{\mp ikz}e^{i\omega t} \end{cases} \quad (100)$$

où l'indice "+" (respectivement l'indice "-") est utilisé pour l'onde progressive (respectivement l'onde régressive), i.e. se propageant dans le sens des  $z$  croissants (respectivement dans le sens des  $z$  décroissants). En d'autres termes :

$$\begin{cases} \vec{E}_+(z) = \vec{E}_{o+}(z)e^{-ikz} \\ \vec{E}_-(z) = \vec{E}_{o-}(z)e^{+ikz} \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \vec{n}_z \cdot \vec{E}_{o+} = 0 \\ \vec{n}_z \cdot \vec{E}_{o-} = 0 \end{cases} \quad (101)$$

Dans la suite, les indices "±" ou "∓" indiqueront que ces deux ondes sont présentes et leur sommation sera sous-entendue :

$$\vec{E}_{\pm}(z) = \vec{E}_+(z) + \vec{E}_-(z) = \vec{E}_{o+}e^{-ikz} + \vec{E}_{o-}e^{+ikz} = \vec{E}_{o\pm}e^{\mp ikz} \quad (102)$$

La structure du champ électromagnétique obtenue par l'analyse précédente permet de déduire directement de l'expression du  $\vec{E}$  l'expression de  $\vec{H}$  :

$$\vec{H} = \frac{\vec{n}_z}{\eta} \wedge \vec{E} \implies \vec{H}_{\pm}(z) = \pm \frac{\vec{n}_z}{\eta} \wedge \vec{E}_{\pm}(z) = \pm \frac{1}{\eta} (\vec{n}_z \wedge \vec{E}_{o\pm}) e^{\mp ikz} \quad \text{avec :} \quad \vec{n}_z \cdot \vec{E}_{o\pm} = 0 \quad (103)$$

D'où la forme générale de l'onde plane progressive harmonique :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{E}(z,t) = \vec{E}(z)e^{i\omega t} = \vec{E}_{o\pm}e^{\mp ikz}e^{i\omega t} \\ \vec{H}(z,t) = \frac{\vec{n}_z}{\eta} \wedge \vec{E}(z,t) \end{cases}} \quad (104)$$

Puisque les deux ondes partagent la même pulsation (et, comme on le verra, puisque la pulsation est conservée à travers le dioptre), le terme en  $\{e^{i\omega t}\}$  sera souvent ignoré dans les expressions suivantes. Pour retrouver la forme complète des champs, il suffira de se rappeler de l'équation 100.

### 4.1.4 Solutions harmoniques, propagation dans une direction oblique

Le cas d'une onde se propageant dans une direction  $\vec{n}_k$  oblique par rapport aux axes du système de coordonnées cartésien peut être retrouvé aisément en effectuant la substitution suivante dans toutes les expressions ci-dessus :

$$\boxed{e^{\pm ikz} \longrightarrow e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{r}}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\vec{k} = k \vec{n}_k} \quad \text{et :} \quad \boxed{k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = n \frac{\omega}{c}} \quad (105)$$

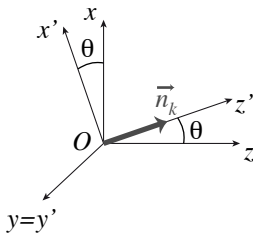


FIGURE 9

où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde. Celui-ci est dirigé dans le sens de propagation de l'onde. Par convention, on s'intéressera à des ondes se propageant de la gauche vers la droite. Dans ces conditions, le cas  $\{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}\}$  est associé à l'onde progressive, tandis que le cas  $\{e^{+i\vec{k} \cdot \vec{r}}\}$  correspond à l'onde régressive. On définit alors un nouveau système de coordonnées ( $Ox'y'z'$ ) obtenu à partir du système de coordonnées original ( $Oxyz$ ) par une rotation d'un angle  $\theta$  autour de ( $Oy$ ) telle que ( $Oz'$ ) soit parallèle à la direction de propagation de l'onde (Figure 9). Le plan ( $Ox'y'$ ) est donc le plan d'onde. Ainsi, le vecteur d'onde  $\vec{k}$  peut être décomposé de plusieurs façons :

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_z z = k z'} \quad (106)$$



#### 4.1.5 Onde magnétique transverse, onde électrique transverse

À condition que l'onde étudiée possède une polarisation (i.e. si l'onde n'est pas polarisée aléatoirement), il est possible de considérer l'onde comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement selon des directions indépendantes (propriétés de décomposition des ondes polarisées). Il suffit alors de distinguer deux cas associés à deux directions particulières pour reconstituer le comportement de toute onde à la traversée d'un dioptre. Dans la suite, on séparera le cas de l'onde "*magnétique transverse*" (TM) et celui de l'onde "*électrique transverse*" (TE). Dans le cas TM, le champ magnétique  $\vec{B}$  (ou l'excitation magnétique  $\vec{H}$ ) possède une direction transverse au plan d'incidence, alors que le champ électrique  $\vec{E}$  appartient au plan d'incidence ( $Oxz$ ) (Figure 10).

À l'inverse, dans le cas TE, le champ électrique  $\vec{E}$  est transverse (i.e. normal au plan d'incidence), et  $\vec{B}$  (ou  $\vec{H}$ ) est dans le plan d'incidence.

Avec cette décomposition, une onde polarisée rectilignement dans une direction quelconque peut s'écrire :

$$\begin{cases} \vec{E}_+(z', t) &= [\vec{n}_{x'} E_{TM+} + \vec{n}_{y'} E_{TE+}] e^{i(\omega t - kz')} \\ \vec{H}_+(z', t) &= \frac{1}{\eta} [\vec{n}_{y'} E_{TM+} - \vec{n}_{x'} E_{TE+}] e^{i(\omega t - kz')} \end{cases} \quad (107)$$

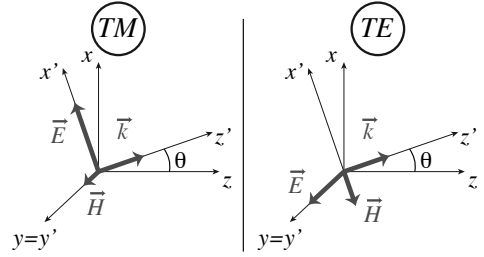


FIGURE 10

## 4.2 Réflexion et transmission à l'interface de deux diélectriques

On s'intéresse à présent à la manière dont une onde est modifiée au travers d'une interface séparant deux milieux. Les milieux considérés sont des diélectriques sans perte, ne contenant ni charges libres ( $\rho = 0$ ), ni courants de conduction ( $\vec{j} = \vec{0}$ ).

### 4.2.1 Conditions de passage

Les équations de Maxwell sous leur forme la plus complète (équation 18) portent en elles des informations importantes sur la manière dont les différentes composantes (tangentielle ou normale) des champs sont modifiées ou conservées à travers un dioptre. En effet, grâce aux théorèmes intégraux, il est possible de transformer le rotationnel (respectivement la divergence) d'un champ en une circulation (respectivement un flux) de ce champ au travers d'un contour (respectivement une surface). Puisque les équations de Maxwell ont une portée générale, il est possible de choisir n'importe quel contour (respectivement n'importe quelle surface). Ainsi, en "entourant" le dioptre, on peut alors comparer les valeurs des champs de part et d'autre du dioptre. Pour le rotationnel, choisissons un contour rectangulaire, dont deux côtés sont normaux à la surface, tandis que les deux autres côtés sont parallèles à la surface et inclus dans le plan d'incidence (Figure 11). En calculant la circulation du vecteur  $\vec{E}$  le long de ce contour et en appliquant le théorème de Stokes, on aboutit à :

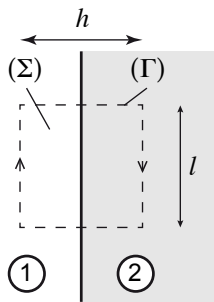


FIGURE 11

$$\left. \begin{array}{l} \text{(MF)} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(Stokes)} \quad \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = (E_{T1} - E_{T2}) l \quad (108)$$

où  $E_{Ti}$  correspond à la composante du champ  $\vec{E}$  selon la direction transverse à la direction d'incidence (i.e. parallèle à l'interface, dans le plan d'incidence). Lorsque la largeur  $h$  du contour d'intégration ( $\Gamma$ ) tend vers zéro, le flux du champ  $\vec{B}$  à travers ( $\Sigma$ ) tendra également vers zéro. Par conséquent, les valeurs de la composante transverse de  $\vec{E}$  de part et d'autre de l'interface vont tendre vers une égalité :

$$(\Sigma) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Flux de } \vec{B} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{T1} = E_{T2}} \quad (109)$$

En d'autres termes, la composante *tangentielle* de  $\vec{E}$  est continue à travers le dioptre. On admettra que cette propriété est également vérifiée en incidence oblique. À l'inverse, l'équation de Maxwell-Flux

permet d'aboutir à des relations de continuité des composantes normales de  $\vec{B}$  à l'aide du théorème d'Ostrogradski (Figure 12) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(M}\Phi\text{)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{(Ostrogradski)} \quad \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot d\vec{V} = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = (B_{N1} - B_{N2}) S \quad (110)$$

où  $B_{Ni}$  correspond à la composante du champ  $\vec{B}$  normale au plan du dioptré. La composante *normale* de  $\vec{B}$  est donc continue au travers du dioptré :

$$\boxed{B_{N1} = B_{N2}} \quad (111)$$

Lorsque des charges ou des courants sont présents sur l'interface considérée (le dioptré), la composante normale de  $\vec{E}$  et la composante tangentielle de  $\vec{B}$  ne sont pas continues au travers de l'interface. En revanche, quand l'interface est dépourvue de charges ou de courants, un traitement analogue peut être effectué pour montrer (en utilisant **(MA)**) que la composante tangentielle de  $\vec{H}$  et (utilisant **(MG)**) la composante normale de  $\vec{D}$  sont continues à travers le dioptré. Les relations constitutives impliquent immédiatement qu'il en va de même respectivement pour  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$ , de sorte que les champs électriques et magnétiques *totaux* sont continus à travers le dioptré :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E}_1 = \vec{E}_2 \\ \vec{H}_1 = \vec{H}_2 \end{array}} \quad (112)$$

La dernière condition de passage concerne la pulsation des ondes se propageant de part et d'autre du dioptré. Au niveau de l'interface, quel que soit le côté, la dépendance en temps des variations des champs est imposée par la source : lorsqu'une onde de pulsation  $\omega_1$  se propageant dans le milieu 1 arrive au contact du milieu 2, la durée séparant deux maxima du champ électrique associé est la même de chaque côté de l'interface. En conséquence, en notant  $\omega_2$  la pulsation de l'onde dans le milieu 2 :

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \omega} \quad (113)$$

#### 4.2.2 Incidence normale

Considérons une onde frappant un dioptré avec une incidence normale. La direction ( $Oz$ ) est normale au dioptré. Etant donnée la symétrie de rotation par rapport à l'axe ( $Oz$ ), la distinction entre une polarisation magnétique transverse (TM) ou électrique transverse (TE) est inutile. Pour simplifier, considérons le cas TM (Figure 13). La continuité des champs totaux implique :

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{1+} + E_{1-} = E_{2+} + (E_{2-}) \\ H_{1+} + H_{1-} = H_{2+} + (H_{2-}) \end{array}} \quad (114)$$

où les termes entre parenthèses correspondent à une onde incidente issue de la droite, provenant du milieu 2. Cette onde n'est pas considérée, puisqu'on s'intéresse uniquement à la manière dont une onde issue du milieu 1 ( $E_{1+}$ ) est transmise dans le milieu 2 ( $E_{2+}$ ) ou réfléchiée vers le milieu 1 ( $E_{1-}$ ). Les champs totaux s'écrivent (en "oubliant" la composante temporelle des champs, qui est la même pour toutes les ondes) :

$$\boxed{\begin{cases} E(z) = E_{o+}e^{-ikz} + E_{o-}e^{+ikz} = E_+(z) + E_-(z) \\ H(z) = \frac{1}{\eta} [E_{o+}e^{-ikz} - E_{o-}e^{+ikz}] = \frac{1}{\eta} [E_+(z) - E_-(z)] \end{cases}} \quad \text{avec : } \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_o}{n} \quad (115)$$

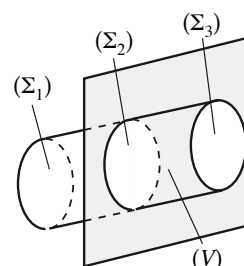


FIGURE 12

FIGURE 12: Diagram illustrating the application of the Ostrogradski theorem to a magnetic field  $\vec{B}$ . A volume  $V$  is bounded by a surface  $\Sigma$ . The surface  $\Sigma$  is divided into three parts:  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , and  $\Sigma_3$ . The volume  $V$  is shaded, and the surface  $\Sigma$  is shown as a dashed line. The theorem states that the divergence of  $\vec{B}$  over the volume is equal to the flux of  $\vec{B}$  through the surface.

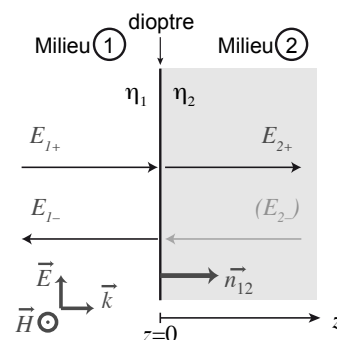


FIGURE 13

D'où, en utilisant les conditions de passage (équation 114) :

$$\begin{cases} E_{1+} + E_{1-} &= E_{2+} \\ \frac{1}{\eta_1} [E_{1+} - E_{1-}] &= \frac{1}{\eta_2} E_{2+} \end{cases} \quad (116)$$

En introduisant les *coefficient de réflexion*  $\rho$  et de *transmission*  $\tau$  :

$$\rho = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} \quad ; \quad \tau = \frac{E_{2+}}{E_{1+}} \quad (117)$$

on obtient les *formules de Fresnel* :

$$\boxed{1 + \rho = \tau} \quad ; \quad \boxed{\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} \quad ; \quad \boxed{\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}} \quad (118)$$

Ou bien, de façon équivalente, en utilisant la relation  $\eta = \eta_o/n$  :

$$\boxed{\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \quad ; \quad \boxed{\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}} \quad (119)$$

Un cas particulier intéressant est celui dans lequel le milieu 2 est constitué d'un conducteur, tandis que le milieu 1 correspond au vide (i.e.  $n_1 = 1$ ). Nous avons vu que lorsque  $\gamma \ll \omega \ll \omega_p$ , le vecteur d'onde est imaginaire pur (section 3.3.4) :  $\underline{k}_2 = ik''$ . Dans ces conditions, l'indice de réfraction est lui aussi imaginaire pur :

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{k_2}{k_o} = \frac{ik''}{k_o} \quad \text{avec :} \quad k'' = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} \quad \text{et :} \quad k_o = \frac{\omega}{c} \\ \Rightarrow n_2 &= i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = i\kappa \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho = \frac{1 - i\kappa}{1 + i\kappa} \\ \tau = \frac{2}{1 + i\kappa} \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \kappa \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho \rightarrow -1 \\ \tau \rightarrow 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (120)$$

L'onde est donc totalement réfléchie, et subit en outre un déphasage de  $-\pi$ . Dans le milieu 1, l'onde résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie est donc une *onde stationnaire*.

### 4.2.3 Incidence oblique

On analyse ici les propriétés de réflexion des dioptries pour une onde incidente oblique. L'onde incidente ( $E_{1+}$ ), se propageant dans la direction  $z'$ , est décomposée selon ses deux composantes principales : électrique transverse ou magnétique transverse (équation 107 et Figure 14) :

$$\begin{cases} \vec{E}_+(z', t) &= [\vec{n}_{x'} E_{TM+} + \vec{n}_{y'} E_{TE+}] e^{-ikz'} \\ \vec{H}_+(z', t) &= \frac{1}{\eta} [\vec{n}_{y'} E_{TM+} - \vec{n}_{x'} E_{TE+}] e^{-ikz'} \end{cases} \quad (121)$$

avec :

$$z' = x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1 \quad \Rightarrow \quad kz' = k_x x + k_z z \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} k_x = k \sin \theta \\ k_z = k \cos \theta \end{cases} \quad (122)$$

La continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  implique :

$$(\vec{E}_{1+} + \vec{E}_{1-}) \cdot \vec{n}_y = \vec{E}_{2+} \cdot \vec{n}_y \quad (123)$$

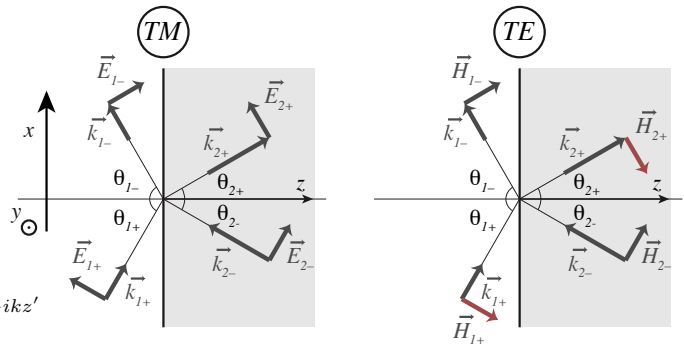


FIGURE 14

En notant  $\vec{E}_T = \vec{E} - \vec{n}_z E_z$  la composante parallèle à l'interface, cette expression donne :

$$E_{T1+} e^{-i(k_{x1+}x + k_{y1+}y)} + E_{T1-} e^{-i(k_{x1-}x + k_{y1-}y)} = E_{T2+} e^{-i(k_{x2+}x + k_{y2+}y)} \quad (124)$$

Puisque cette relation doit être vérifiée quelle que soit la translation appliquée selon  $x$  ou  $y$  :

$$\begin{cases} k_{x1+} = k_{x1-} = k_{x2+} \\ k_{y1+} = k_{y1-} = k_{y2+} \end{cases} \implies k_{1+} \sin \theta_{1+} = k_{1-} \sin \theta_{1-} = k_{2+} \sin \theta_{2+} \quad (125)$$

On en déduit la loi de la réflexion de Snell-Descartes :

$$\boxed{\theta_{1+} = \theta_{1-}} \quad ; \quad \boxed{\theta_{2+} = \theta_{2-}} \quad (126)$$

Et, en notant que  $k = nk_o = n\omega/c$ , on aboutit à la loi de la réfraction de Snell-Descartes :

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2} \quad (\text{Loi de Snell-Descartes}) \quad (127)$$

Le calcul des coefficients de transmission et réflexion nécessite d'isoler les composantes transverses du champ électrique de part et d'autre du dioptré. Du côté 1 :

$$\vec{E}_{1+} = [\vec{n}_x E_{TM+} + \vec{n}_y E_{TE+}] e^{-ikz'} = \underbrace{[(\vec{n}_x \cos \theta + \vec{n}_z \sin \theta) E_{TM+} + \vec{n}_y E_{TE+}]}_{\vec{n}_z E_z} e^{-i(k_x x + k_z z)} \quad (128)$$

D'où :

$$\begin{cases} \vec{E}_{T1+} = \vec{E}_{1+} - \vec{n}_z E_z = [\vec{n}_x \cos \theta E_{TM+} + \vec{n}_y E_{TE+}] e^{-i(k_x x + k_z z)} \\ \vec{E}_{T1-} = \vec{E}_{1-} - \vec{n}_z E_z = [\vec{n}_x \cos \theta E_{TM-} + \vec{n}_y E_{TE-}] e^{-i(k_x x - k_z z)} \end{cases} \quad (129)$$

Finalement, en ignorant le terme commun  $\{e^{-ik_x x}\}$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}_T(z) &= \vec{n}_x E_{TM}(z) + \vec{n}_y E_{TE}(z) \\ \text{avec : } \begin{cases} E_{TM}(z) &= A_{T+} e^{-ik_z z} + A_{T-} e^{+ik_z z} \\ E_{TE}(z) &= B_{T+} e^{-ik_z z} + B_{T-} e^{+ik_z z} \end{cases} \quad (130) \\ \text{et : } \begin{cases} A_{T\pm} &= E_{TM\pm} \cos \theta \\ B_{T\pm} &= E_{TE\pm} \end{cases} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \vec{H}_T(z) &= \vec{n}_y H_{TM}(z) - \vec{n}_x H_{TE}(z) \\ \text{avec : } \begin{cases} H_{TM}(z) &= \frac{1}{\eta_{TM}} [A_{T+} e^{-ik_z z} - A_{T-} e^{+ik_z z}] \\ H_{TE}(z) &= \frac{1}{\eta_{TE}} [B_{T+} e^{-ik_z z} - B_{T-} e^{+ik_z z}] \end{cases} \quad (131) \\ \text{et : } \begin{cases} \eta_{TM} &= \eta \cos \theta \\ \eta_{TE} &= \frac{\eta}{\cos \theta} \end{cases} \end{aligned}$$

Ou, de façon plus compacte :

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_T(z) &= E_{T+} e^{-ik_z z} + E_{T-} e^{+ik_z z} \\ H_T(z) &= \frac{1}{\eta_T} [E_{T+} e^{-ik_z z} - E_{T-} e^{+ik_z z}] \end{cases} \\ \text{avec : } \begin{cases} \text{pour TM} \\ \text{pour TE} \end{cases} : E_T = \begin{cases} E_{TM} \\ E_{TE} \end{cases} ; E_{T\pm} = \begin{cases} E_{TM\pm} \cos \theta \\ E_{TE\pm} \end{cases} ; \eta_T = \begin{cases} \eta_{TM} = \eta \cos \theta \\ \eta_{TE} = \frac{\eta}{\cos \theta} \end{cases} \quad (132) \end{aligned}$$

Ces expressions prennent une forme analogue d'un côté ou de l'autre du dioptre. D'autre part, on remarque que ces expressions ont une forme identique à celles obtenues pour la propagation d'une onde selon une direction normale à l'interface (équation 115), moyennant les substitutions suivantes :

$$\begin{array}{|l} \hline \eta \longrightarrow \eta_T \iff n \longrightarrow n_T \\ e^{\pm ikz} \longrightarrow e^{\pm ik_z z} = e^{\pm ikz \cos \theta} \\ \hline \end{array} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \eta_{TM} = \eta \cos \theta \\ \eta_{TE} = \frac{\eta}{\cos \theta} \end{cases} \iff \begin{cases} n_{TM} = \frac{n}{\cos \theta} \\ n_{TE} = n \cos \theta \end{cases} \quad (133)$$

#### 4.2.4 Angle d'incidence maximum et angle critique

Dans la suite, nous supposons que les deux milieux concernés sont des milieux sans pertes :

$$(\epsilon_1; \mu_1) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad (\epsilon_2; \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (134)$$

On rappelle les relations :

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad ; \quad n = \sqrt{\mu\epsilon} \quad ; \quad n = \frac{\mu}{\eta} \quad (135)$$

D'après la loi de la réfraction de Snell-Descartes (équation 127), la direction de propagation d'une onde est modifiée au cours de son passage à travers un dioptre (Figure 15) :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \implies \sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 = \frac{v_2}{v_1} \sin \theta_1 \quad (136)$$

Dès lors, suivant la relation entre les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  des deux milieux, l'angle d'émergence  $\theta_2$  sera plus ou moins normal à l'interface par rapport à l'angle d'incidence  $\theta_1$  (Figure 16) :

$$\begin{array}{l} * n_1 < n_2 \implies \sin \theta_2 < \sin \theta_1 \implies \theta_2 < \theta_1 \\ * n_1 > n_2 \implies \sin \theta_2 > \sin \theta_1 \implies \theta_2 > \theta_1 \end{array} \quad (137)$$

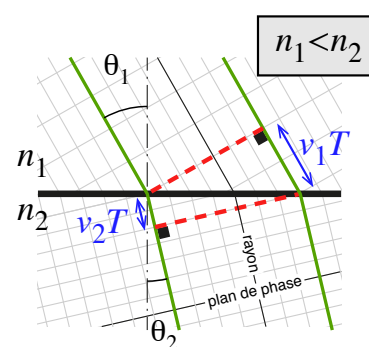


FIGURE 15

Ainsi, lorsque le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1 ( $n_1 < n_2$ ), l'angle d'émergence est plus proche de la direction normale au dioptre. Au contraire, lorsque le milieu 1 est plus réfringent que le milieu 2 ( $n_1 > n_2$ ), l'onde réfractée a tendance à s'éloigner de la direction normale. Par conséquent, suivant les cas, les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  seront limités par une valeur critique qui ne peut pas être dépassée (Figure 17) :

$$\begin{array}{l} * n_1 < n_2 \implies \text{Il existe : } \theta_2^c \text{ tel que : } \theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et : } \sin \theta_2^c = \frac{n_1}{n_2} \\ * n_1 > n_2 \implies \text{Il existe : } \theta_1^c \text{ tel que : } \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ et : } \sin \theta_1^c = \frac{n_2}{n_1} \end{array} \quad (138)$$

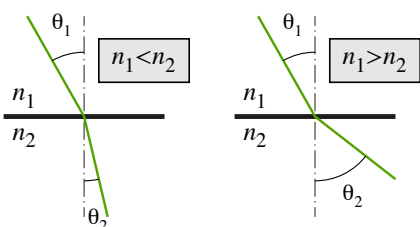


FIGURE 16

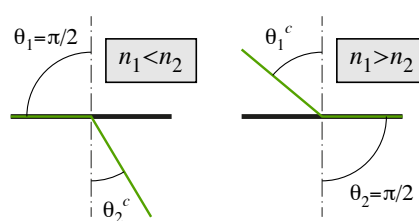


FIGURE 17

Dans le premier cas ( $n_1 < n_2$ ), quelle que soit l'angle d'incidence de l'onde issue du milieu 1, l'onde sera transmise dans le milieu 2 et se propagera vers l'intérieur du milieu avec un angle d'émergence inférieur à  $\theta_2^c$ . Dans le second cas ( $n_1 > n_2$ ), lorsque l'angle d'incidence excède l'angle critique  $\theta_1^c$ , l'onde

émergente acquerra un angle “rasant”, parallèle à l’interface : l’onde émergente ne pénétrera donc pas du tout à l’intérieur du milieu 2.

Le coefficient de transmission sera nul tandis que le coefficient de réflexion sera égal à 1. Ce cas correspond à la *réflexion interne totale*, qui est rencontrée par exemple lorsqu’on observe la surface de l’eau dans une piscine depuis l’intérieur de l’eau : la surface supérieure se comporte comme un miroir, et réfléchit les rayons lumineux issus du fond du bassin, dans le plan d’incidence<sup>7</sup>.

Pour fixer des ordres de grandeurs, prenons le cas de l’interface entre l’air et un milieu faiblement réfringent (l’eau ou le verre dans le domaine visible) ou un milieu fortement réfringent (l’eau dans le domaine des radiofréquences) :

$$\begin{aligned}
 * \quad n_{\text{air}} &= 1 \\
 * \quad n_{\text{verre}} &= 1.5 \quad \implies \quad \theta_{\text{verre-air}}^c = \theta_{\text{air-verre}}^c = \arcsin\left(\frac{1}{1.5}\right) = 41.8^\circ \\
 * \quad n_{\text{eau}} &= 1.33 \quad (\text{Vis.}) \quad \implies \quad \theta_{\text{eau-air}}^c = \theta_{\text{air-eau}}^c = \arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right) = 48.6^\circ \quad (139) \\
 * \quad n_{\text{eau}} &= 9 \quad (\text{RF}) \quad \implies \quad \theta_{\text{eau-air}}^c = \theta_{\text{air-eau}}^c = \arcsin\left(\frac{1}{9}\right) = 6.4^\circ
 \end{aligned}$$

Le dernier cas signifie qu’une onde électromagnétique dans le domaine radiofréquence aura toujours une direction de propagation quasiment normale à l’interface après la traversée d’un dioptre air-eau.

#### 4.2.5 Coefficients de transmission et de réflexion

Ces relations géométriques doivent être complétées par les coefficients de transmission et de réflexion pour déterminer quelle énergie est transportée par chacune des deux ondes (réfractée et réfléchi). En utilisant l’analogie avec le cas de l’incidence normale (équation 118), les coefficients de réflexions peuvent être trouvés par substitution de  $\eta$  ou  $n$  (équation 133). Par exemple, dans le cas (TM), le coefficient de réflexion sera :

$$\rho_{TM} = \frac{E_{1TM-}}{E_{1TM+}} = \frac{\eta_{2TM} - \eta_{1TM}}{\eta_{2TM} + \eta_{1TM}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_2 - \eta_1 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1} = \frac{\frac{\mu_2}{n_2} \cos \theta_2 - \frac{\mu_1}{n_1} \cos \theta_1}{\frac{\mu_2}{n_2} \cos \theta_2 + \frac{\mu_1}{n_1} \cos \theta_1} \quad (*) \quad (140)$$

$$(*) \times \left(\frac{n_1^2 \times n_2^2}{\mu_2}\right) \implies \boxed{\rho_{TM} = \frac{n_1 n_2 \cos \theta_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_1}{n_1 n_2 \cos \theta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_1}}$$

De la même manière :

$$\tau_{TM} = \frac{E_{2TM+}}{E_{1TM+}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1} = \frac{2\mu_2 \cos \theta_2}{\mu_2 \cos \theta_2 + \mu_1 \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_1} \implies \boxed{\tau_{TM} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_2}{n_1 n_2 \cos \theta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_1}} \quad (141)$$

Et, pour le cas (TE) :

$$\boxed{\rho_{TE} = \frac{E_{1TE-}}{E_{1TE+}} = \frac{n_{1TE} - n_{2TE}}{n_{1TE} + n_{2TE}} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau_{TE} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}} \quad (142)$$

7. Se superposent à ces rayons réfléchis les rayons réfractés et provenant de l’autre côté de l’interface (i.e. depuis l’air). Cependant, comme on va le voir, le coefficient de transmission associé ces rayons réfractés est très faible, alors que le coefficient de réflexion associé aux ondes réfléchies depuis le fond du bassin est proche de 1.

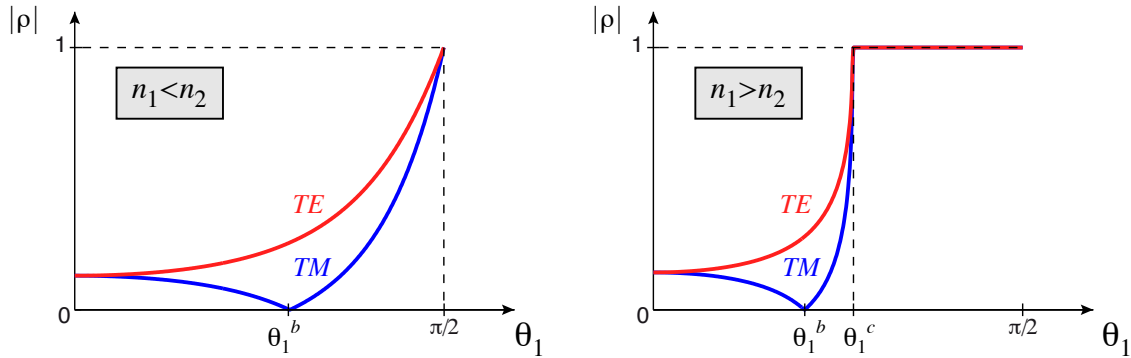


FIGURE 18

En utilisant la loi de Snell-Descartes (équation 127), on peut remanier ces expressions pour ne faire apparaître que l'angle d'incidence  $\theta_1$ . Pour les coefficients de réflexion, cette transformation donne :

$$\rho_{TM} = \frac{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_1} - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_1}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_1} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_1} \quad \text{et} \quad \rho_{TE} = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (143)$$

On remarque que les coefficients de réflexion peuvent prendre des valeurs comprises entre  $-1$  et  $1$ . Une valeur négative indique alors un déphasage supérieur à  $\pi$  entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. L'allure de la valeur absolue du coefficient de réflexion en fonction de  $\theta_1$  pour les cas  $n_1 < n_2$  et  $n_1 > n_2$  est donnée en Figure 18. On constate bien que, dans le cas  $n_1 > n_2$ , le coefficient de réflexion n'est défini que pour  $\theta_2 < \theta_2^c$ . On remarque par ailleurs qu'il existe un angle d'incidence particulier, appelé *angle de Brewster* (noté  $\theta_1^b$ ), pour lequel une *transmission totale* apparaît. Cette transmission totale n'intervient que dans le cas d'une onde polarisée transverse magnétique. La valeur de cet angle est obtenue en recherchant l'angle pour lequel  $\rho = 0$  :

$$\rho_{TM} = 0 \iff \begin{cases} n_1 < n_2 \longrightarrow \tan \theta_1^b = \frac{n_2}{n_1} \\ n_1 > n_2 \longrightarrow \tan \theta_2^b = \frac{n_1}{n_2} \end{cases} \iff \boxed{\theta_2^b = 90^\circ - \theta_1^b} \quad (144)$$

Les valeurs correspondant aux dioptries air-eau et air-verre sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} * \quad n_{\text{eau}} : \quad \theta_1^b &= 53.1^\circ \quad ; \quad \theta_2^b = 36.9^\circ \\ * \quad n_{\text{verre}} : \quad \theta_1^b &= 56.3^\circ \quad ; \quad \theta_2^b = 33.7^\circ \end{aligned} \quad (145)$$

La transmission totale de la composante (TM) signifie que l'onde réfléchie ne contient plus de composante (TM), et donc qu'elle est entièrement polarisée selon la direction (TE). Pour une source polarisée aléatoirement, cette propriété demeure vraie en moyenne : l'onde réfléchie est polarisée aléatoirement, mais la composante du champ électrique est alors uniquement portée par la direction transverse. Ce phénomène est utilisé pour réduire la luminosité apparente de la surface de la mer ou de la neige en appliquant un filtre polarisant sur des lunettes ou sur un objectif photographique. En choisissant une direction du polariseur verticale, la composante horizontale du  $\vec{E}$  sera réfléchi par le filtre, de sorte que l'intensité transmise à l'œil ou au capteur est significativement réduite. Ce procédé sera d'autant plus efficace que la source de lumière (le soleil) sera située au dessus de l'horizon avec un angle d'élevation proche de l'angle  $90^\circ - \theta_1^b \approx 37^\circ$ .

## Références

- Feynman, R., Leighton, R., Sands, M., 1999. Le cours de physique de feynman, électromagnétisme 1.
- Nicolas, M., 2009. Ondes et électromagnétisme. Dunod.
- Orfanidis, S. J., 2002. Electromagnetic waves and antennas. <http://eceweb1.rutgers.edu/~orfanidi/ewa>.
- Pérez, J.-P., Carles, R., Fleckinger, R., 1996. Electromagnétisme : fondements et applications avec 300 exercices et problèmes résolus. Masson.
- Zangwill, A., 2012. Modern electrodynamics. Cambridge University Press.